< 付録2：合成積の微分 >

補題 2 変数関数 $\varphi(t,u)$ が連続で偏微分可能であり，偏導関数 $\varphi_t(t,u)$ が連続であれば

$$\frac{d}{dt}\int_0^t \varphi(t,u)dt = \varphi(t,t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,u)du$$

(証明) $\displaystyle \frac{d}{dt}\int_0^t \varphi(t,u)du = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\int_0^{t+h}\varphi(t+h,u)du - \int_0^t \varphi(t,u)du\right\}$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{\int_0^{t+h}\frac{\varphi(t+h,u)-\varphi(t,u)}{h}du + \frac{1}{h}\int_t^{t+h}\varphi(t,u)du\right\}$$

$$= \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,u)du + \varphi(t,t)$$ (証明終)

例 P74 例題の $x(t) = \displaystyle\int_0^t \left\{e^{-2(t-u)} - e^{-3(t-u)}\right\} f(u)du$ が解であることを確かめる。

$g(t) = e^{-2t} - e^{-3t}$ とおくと $g(t)$ は同次微分方程式の解である。つまり

$$g''(t) + 5g'(t) + 6g(t) = 0$$

が成立する。また

$$x(t) = \int_0^t g(t-u)f(u)du = (g * f)(t)$$

である。$g(0) = 0$ と補題から

$$x'(t) = g(0)f(t) + \int_0^t g'(t-u)f(u)du = \int_0^t g'(t-u)f(u)du$$

となる。$g'(t) = -2e^{-2t} + 3e^{-3t}$ より $g'(0) = 1$ から

$$x''(t) = g'(0)f(t) + \int_0^t g''(t-u)f(u)du = f(t) + \int_0^t g''(t-u)f(u)du$$

よって

$$x''(t) + 5x'(t) + 6x(t)$$
$$= f(t) + \int_0^t \{g''(t-u) + 5g'(t-u) + 6g(t-u)\} f(u)du = f(t)$$

でかつ $x(0) = 0$，$x'(0) = 0$ より $x(t)$ が例題の解であることが確かめられた。