

< 付録1: フーリエ級数の収束とフーリエ逆変換の収束 >

$f(t)$ を周期 2π の周期関数とする。 $f(t)$ のフーリエ級数の第 n 部分和 $S_n(t)$ は

$$\begin{aligned}
 S_n(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^n \{a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\} \\
 &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) du \right) + \sum_{k=1}^n \left\{ \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos(ku) du \right) \cos(kt) + \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sin(ku) du \right) \sin(kt) \right\} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) du + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos(k(t-u)) du = \int_{-\pi}^{\pi} f(u) D_n(t-u) du = (f * D_n)(t)
 \end{aligned}$$

と表される。ここで

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kt) \right\}$$

である。この関数 $D_n(t)$ を **ディリクレ核** (Dirichlet kernel) と呼ぶ。

$$\begin{aligned}
 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kt) &= 1 + 2 \sum_{k=1}^n \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2} = e^{-itn} \sum_{k=0}^{2n} (e^{it})^k \\
 &= e^{-itn} \times \frac{1 - e^{(2n+1)it}}{1 - e^{it}} = \frac{e^{-i(n+\frac{1}{2})t} - e^{i(n+\frac{1}{2})t}}{e^{-\frac{it}{2}} - e^{\frac{it}{2}}} = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin(\frac{t}{2})}
 \end{aligned}$$

よりディリクレ核は

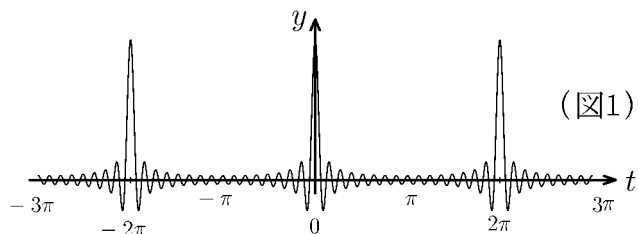
$$D_n(t) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2\pi \sin(\frac{t}{2})}$$

と表される。そして $f(t)$ のフーリエ級数の第 n 部分和 $S_n(t)$ は $f(t)$ と $D_n(t)$ との合成積 (たたみ込み) で表される。 $n \rightarrow \infty$ のとき、 $D_n(t)$ は周期 2π のデルタ関数に収束すると考えればよい。

ディリクレ核 $D_n(t) = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{2\pi \sin(\frac{t}{2})}$ はデルタ収束関数列 $\rho_n(t) = \frac{\sin(nt)}{\pi t}$ とよく似ている。

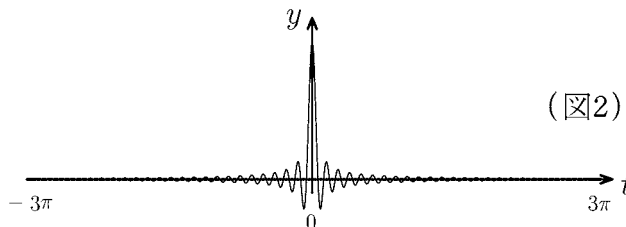
実際 $-\pi < t < \pi$ の範囲ではグラフはほとんど同じであるが、ディリクレ核は周期 2π の周期関数であるところが $\rho_n(t)$ と異なる。図1と図2は $n = 16$ のときのグラフである。

< ディリクレ核 $D_n(t)$ >



(図1)

< デルタ収束関数列 $\rho_n(t)$ >



(図2)

< フーリエ級数の収束 >

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f * D_n)(t) = \frac{f_+(t) + f_-(t)}{2}$$

($-\pi < t < \pi$)

< フーリエ逆変換の収束 >

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f(t)]] = \lim_{n \rightarrow \infty} (f * \rho_n)(t) = \frac{f_+(t) + f_-(t)}{2}$$

($-\infty < t < \infty$)