＜熱伝導方程式への応用 4＞

C 棒の長さが半無限 $(0 \leqq x < \infty)$

式 $\boxed{*}$ の変数 x は $(0 \leqq x < \infty)$ の範囲であるとする。この式を

［初期条件］ $u(0\,,\,x) = 0$ $\quad (C-1)$

［境界条件］ $u(t\,,\,0) = g(t)\ ,\quad u(t\,,\,+\infty) = \lim_{x \to +\infty} u(t\,,\,x) = 0$ $\quad (C-2)$

のもとで解く。

＜解法＞ x をパラメータとみなし，$u(t\,,\,x)$ の t に関するラプラス変換を

$$\mathscr{L}[u(t\,,\,x)] = \int_0^\infty u(t\,,\,x)e^{-st}dt = U(s\,,\,x)$$

とおく。この両辺を x で 2 回微分すると，$\mathscr{L}[u_{xx}] = U_{xx}(s\,,\,x)$ である。

また $\mathscr{L}\left[\dfrac{du}{dt}\right] = sU(s\,,\,x) - u(0\,,\,x) = sU(s\,,\,x)$ である。よって $\boxed{*}$ の

ラプラス変換は $sU(s\,,\,x) = k^2U_{xx}(s\,,\,x)$ より $\dfrac{d^2U}{dx^2} = \dfrac{s}{k^2}U$

だから $U(s\,,\,x) = Ae^{\frac{\sqrt{s}}{k}x} + Be^{-\frac{\sqrt{s}}{k}x}$

境界条件より $U(s\,,\,+\infty) = 0 \ \Rightarrow\ A = 0\ ,\quad U(s\,,\,x) = Be^{-\frac{\sqrt{s}}{k}x}$

$U(s\,,\,0) = \mathscr{L}[u(t\,,\,0)] = \mathscr{L}[g(t)] = G(s)$ より $B = G(s)$

よって $U(s\,,\,x) = G(s)e^{-\frac{\sqrt{s}}{k}x}$

一方 $\mathscr{L}^{-1}[e^{-\frac{x}{k}\sqrt{s}}] = \dfrac{\frac{x}{k}}{2\sqrt{\pi}t^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{\left(\frac{x}{k}\right)^2}{4t}} = \dfrac{x}{2k\sqrt{\pi}}t^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{x^2}{4tk^2}} = \gamma(t)$

とおくと
$$u(t\,,\,x) = \mathscr{L}^{-1}[U(s\,,\,x)] = \mathscr{L}^{-1}[G(s)e^{-\frac{x}{k}\sqrt{s}}]$$
$$= (g*\gamma)(t) = \underline{\int_0^t \frac{x}{2k\sqrt{\pi}}(t-u)^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{x^2}{4(t-u)k^2}}g(u)du}$$

これが $\boxed{*}$ の $(C-1)$，$(C-2)$ をみたす解である。このような半無限区間 $(0 \leqq x < \infty)$ ではラプラス変換を用いる。