＜熱伝導方程式への応用 3＞

B　棒の長さが無限 $(-\infty < x < \infty)$

式 $\boxed{*}$ の変数 x は $(-\infty < x < \infty)$ の範囲であるとする。この式を

［初期条件］　$u(0\,,x) = f(x)$　$(B-1)$

［境界条件］　$u(t\,,-\infty) = \lim_{x\to-\infty} u(t\,,x) = 0$　$(B-2)$

$u(t\,,+\infty) = \lim_{x\to+\infty} u(t\,,x) = 0$　$(B-3)$

のもとで解く。

＜解法＞　未知関数 $u = u(t\,,x)$ は t をパラメータとし，x の関数と考えて，x に関するフーリエ変換を

$$\mathscr{F}[u(t\,,x)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(t\,,x)e^{-i\omega x}dx = U(t\,,\omega)$$

$$\mathscr{F}[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx = F(\omega)$$

とおく。$\mathscr{F}\left[\dfrac{d^2u}{dx^2}\right] = (i\omega)^2\,U(t\,,\omega) = -\omega^2\,U(t\,,\omega)$　より，$\boxed{*}$ のフーリエ変換をすると

$$\frac{d}{dt}U(t\,,\omega) = -k^2\omega^2\,U(t\,,\omega)$$

よって

$$U(t\,,\omega) = Ae^{-k^2\omega^2 t}$$

ここで A は変数 t に関しては定数であるが，ω の値によっては変わるかもしれないので $A = A(\omega)$ とおく。$t = 0$ とおくと初期条件より

$$u(0\,,x) = f(x) \quad \xrightarrow{\text{フーリエ変換}} \quad U(0\,,\omega) = F(\omega) = A(\omega)$$

よって　$U(t\,,\omega) = F(\omega)e^{-k^2\omega^2 t}$

一方　$\mathscr{F}^{-1}[e^{-k^2t\omega^2}] = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2t\omega^2}e^{i\omega x}d\omega = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi k^2 t}}e^{-\frac{x^2}{4k^2t}} = g(x)$

よって

$$U(t\,,x) = \mathscr{F}^{-1}[U(t\,,\omega)] = \mathscr{F}^{-1}[F(\omega)e^{-k^2\omega^2 t}] = (f * g)(x)$$

$$= \underline{\frac{1}{\sqrt{4\pi k^2 t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-\frac{(x-u)^2}{4k^2t}}du}$$

これが $\boxed{*}$ の $(B-1)$，$(B-2)$，$(B-3)$ をみたす解である。このような無限区間 $(-\infty < x < \infty)$ ではフーリエ変換を用いる。