# < 熱伝導方程式への応用 2 >

〈 $\boxed{\textbf{A}}$ (棒有限) の解法の続き 〉

(3) $K < 0$ のとき　$K = -q^2$ とおくと，

$$X(x) = B\cos\left(\frac{q}{k}x\right) + C\sin\left(\frac{q}{k}x\right) \qquad (B\ ,\ C \text{ は定数})$$

となる。境界条件 $X(0) = 0$ より　$B = 0 \;\Rightarrow\; X(x) = C\sin\left(\frac{q}{k}x\right)$

$X(L) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{q}{k} = \frac{n\pi}{L} \ \ (n = 0\ ,1\ ,2\ ,\ \cdots)$ であるから，

$$X_n(x) = C_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad , \quad T_n(t) = A_n e^{-q^2 t} = A_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}k\right)^2 t}$$

とおくと，$u(t\ ,x) = T_n(t)X_n(x)$ は $\boxed{*}$ の解であり，その和

$$u(t\ ,x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t\ ,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n C_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}k\right)^2 t}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

も $\boxed{*}$ の解である。初期条件より

$$u(0\ ,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x)$$

である。これは $f(x)$ のフーリエ級数の形をしている。$x$ は $(0 \leqq x \leqq L)$ の範囲であるが，$f(-x) = -f(x)$ と定めると，$f(x)$ は $(-L \leqq x \leqq L)$ で定義された奇関数である。周期 $2L$ の奇関数のフーリエ係数は

$$A_n C_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$$

となる。よって求める解は

$$\begin{aligned} u(t\ ,x) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n C_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}k\right)^2 t}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\ &= \underline{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx\right)e^{-\left(\frac{n\pi}{L}k\right)^2 t}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)} \end{aligned}$$

となる。これが 熱伝導方程式 $\boxed{*}$ を 初期条件 $(A-1)$，境界条件 $(A-2)$ のもとで解いた解である。このように $x$ の範囲が有限の場合はフーリエ級数によって $\boxed{*}$ は解くことができる。