< 熱伝導方程式への応用 1 >

フーリエは 2 階偏微分方程式である熱伝導方程式を解くために関数を三角級数に展開する方法を考えた。

フーリエ級数，フーリエ変換，ラプラス変換の応用として熱伝導方程式の解法を説明する。

1 次元熱伝導方程式とは長さが有限 $(0 \leqq x \leqq L)$，半無限 $(0 \leqq x < \infty)$，あるいは無限 $(-\infty < x < \infty)$ の棒において，熱が伝導するときの温度分布 u の方程式である。$u(t\,,x)$ を時刻 t，位置 x における棒の温度とすると，$u = u(t\,,x)$ は式

$$\boxed{*} \qquad \boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \qquad \text{(1 次元熱伝導方程式)}$$

を満たす。ここで k は正の定数である。これを **1 次元熱伝導方程式**という。
この方程式を棒の長さによって 3 通りの場合に分ける。

$\boxed{\mathbf{A}}$ $\boxed{\text{棒の長さが有限 } (0 \leqq x \leqq L)}$

式 $\boxed{*}$ の変数 x は $(0 \leqq x \leqq L)$ の範囲であるとする。この式を

[初期条件]　$u(0\,,x) = f(x)$　　$(A-1)$
[境界条件]　$u(t\,,0) = 0\,,\quad u(t\,,L) = 0$　　$(A-2)$

のもとに解きたい。

< 解法 >　$u(t\,,x)$ が 時間の関数 $T(t)$ と 位置の関数 $X(x)$ の積として表されているとすれば，$u(t\,,x) = T(t)X(x)$ であり，式 $\boxed{*}$ より

$T'(t)X(x) = k^2 T(t)X''(x) \ \Rightarrow\ \dfrac{T'(t)}{T(t)} = k^2 \dfrac{X''(x)}{X(x)} = K$ (定数) とおくと

$T'(t) = KT(t)$ より $T(t) = Ae^{Kt}$ (A は定数) となる。

$X''(x) = \dfrac{K}{k^2} X(x)$

(1)　$K > 0$ のとき　$X(x) = Be^{\frac{\sqrt{K}}{k}x} + Ce^{-\frac{\sqrt{K}}{k}x}$ (B , C は定数) となるが，境界条件より $X(0) = X(L) = 0$ より $B = C = 0$ となり
$X(x) = 0 \ \Rightarrow\ u(t\,,x) = 0$ となりだめ。

(2)　$K = 0$ のとき　$X(x) = Bx + C$ (B , C は定数) となるが，やはり境界条件より　$X(x) = 0$ となってだめ。