< 常微分方程式への応用 4 >

例題　$\dfrac{d^2x}{dt^2}+5\dfrac{dx}{dt}+6x=f(t)\,,\quad x(0)=x'(0)=0$

(解)　$\mathscr{L}[x(t)]=X(s)\,,\quad \mathscr{L}[f(t)]=F(s)$ とおき，両辺をラプラス変換すると

$$s^2X(s)+5sX(s)+6X(s)=F(s)$$

$$X(s)=\frac{F(s)}{s^2+5s+6}$$

ここで $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2+5s+6}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s+2}-\dfrac{1}{s+3}\right]=e^{-2t}-e^{-3t}$ より

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{F(s)}{s^2+5s+6}\right]=\left(e^{-2t}-e^{-3t}\right)*f(t)$$

$$=\int_0^t\left\{e^{-2(t-u)}-e^{-3(t-u)}\right\}f(u)du$$

(注)　この $x(t)$ が例題の解であることを確かめる計算方法については P81 を参照せよ。

問　ラプラス変換を用いて，次の常微分方程式の初期値問題を解け。

(1)　$\dfrac{d^2x}{dt^2}-3\dfrac{dx}{dt}+2x=f(t)\,,\quad x(0)=x'(0)=0$

(2)　$\dfrac{d^2x}{dt^2}+6\dfrac{dx}{dt}+10x=f(t)\,,\quad x(0)=x'(0)=0$