< 常微分方程式への応用 2 >

例題　$\dfrac{d^2x}{dt^2}+3\dfrac{dx}{dt}+2x=e^t\,,\quad x(0)=0\,,\quad x'(0)=0$

(解)　解 $x(t)$ のラプラス変換を $\mathscr{L}[x(t)]=X(s)$ とおくと

$$\mathscr{L}\left[\frac{dx}{dt}\right]=sX(s)-x(0)=sX(s)\,,\quad \mathscr{L}\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right]=s^2X(s)-sx(0)-x'(0)=s^2X(s)$$

$\mathscr{L}[e^t]=\dfrac{1}{s-1}$ より，微分方程式の両辺をラプラス変換すると

$$s^2X(s)+3sX(s)+2X(s)=\frac{1}{s-1}$$

$$X(s)=\frac{1}{(s^2+3s+2)(s-1)}=\frac{1}{(s+1)(s+2)(s-1)}$$ より答えは

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}[X(s)]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)(s+2)(s-1)}\right]$$

$$=\mathscr{L}^{-1}\left[\left(-\frac{1}{2}\times\frac{1}{s+1}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{s+2}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{s-1}\right)\right]=\underline{-\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{-2t}+\frac{1}{6}e^{t}}$$

問　次の微分方程式の初期値問題をラプラス変換を用いて解け。

(1)　$\dfrac{d^2x}{dt^2}-5\dfrac{dx}{dt}+6x=e^t\,,\quad x(0)=0\,,\quad x'(0)=0$

(2)　$\dfrac{d^2x}{dt^2}-4\dfrac{dx}{dt}+4x=0\,,\quad x(0)=1\,,\quad x'(0)=1$