< 常微分方程式への応用 1 >

例題　微分方程式 $\dfrac{dx}{dt} + x = e^t \quad (t > 0)$ を初期条件 $x(0) = 1$ の下で解け。

(解)　解を $x(t)$ とおき，そのラプラス変換を $\mathscr{L}[x(t)] = X(s)$ とおくと

$$\mathscr{L}\left[\frac{dx}{dt}\right] = sX(s) - x(0) = sX(s) - 1$$

である。微分方程式の両辺のラプラス変換をとると

$$\mathscr{L}\left[\frac{dx}{dt} + x\right] = \mathscr{L}[e^t]$$

$$sX(s) - 1 + X(s) = \frac{1}{s-1}$$

$$\Downarrow$$

$$X(s) = \frac{1 + \frac{1}{s-1}}{s+1} = \frac{s}{(s+1)(s-1)}$$

よって解 $x(t)$ は

$$x(t) = \mathscr{L}^{-1}[X(s)] = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s+1)(s-1)}\right]$$

$$= \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s+1} + \frac{1}{s-1}\right\}\right] = \underline{\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^t}$$

問　次の微分方程式の初期値問題をラプラス変換を用いて解け。

(1)　$\dfrac{dx}{dt} = kx\,, \quad x(0) = a$

(2)　$\dfrac{dx}{dt} + x = e^{-t}\,, \quad x(0) = 1$