＜ラプラス逆変換 3＞

例 1　$\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s-a)(s-b)}\right]$ を求めたい。$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)}=\dfrac{A}{s-a}+\dfrac{B}{s-b}$ とおき右辺を

通分すると $\dfrac{(A+B)s-Ab-aB}{(s-a)(s-b)}$ となり分子が 1 となるため

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -Ab-aB=1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A=\frac{1}{a-b} \quad , \quad B=-\frac{1}{a-b}$$

であるから

$$\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-a)(s-b)}\right]=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{a-b}\left\{\frac{1}{s-a}-\frac{1}{s-b}\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{a-b}\left\{\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right]-\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-b}\right]\right\}=\frac{1}{a-b}\left\{e^{at}-e^{bt}\right\}$$

例 2　$\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s-a)^2+b^2}\right]=\dfrac{1}{b}\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}\right]=\dfrac{1}{b}e^{at}\sin(bt)$

問　次のラプラス逆変換を求めよ。

(1)　$\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2-s-2}\right]$

(2)　$\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2-4}\right]$

(3)　$\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s^2-4s+5}\right]$