＜ラプラス逆変換 1＞

ラプラス変換はフーリエ変換の一種であるから，フーリエ変換と同様に反転公式が成り立つ。

$$\mathscr{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt = F(s) \text{ のとき}$$

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-in}^{\sigma+in} F(s)e^{st}ds = \frac{1}{2}\{f_+(t) + f_-(t)\}$$

特に $f(t)$ が連続であるときは $f_+(t) = f_-(t) = f(t)$ より $\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$ となる。このワークブックでは連続の場合だけを扱うことにする。次の対応関係がある。

$F(s)$	$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$
$a_1F_1(s) + a_2F_2(s)$	$a_1f_1(t) + a_2f_2(t)$
$\dfrac{1}{\alpha}F\left(\dfrac{s}{\alpha}\right)$ $(\alpha > 0)$	$f(\alpha t)$
$F(s-a)$	$e^{at}f(t)$
$e^{-\alpha s}F(s)$ $(\alpha > 0)$	$f(t-\alpha)$ $(t \geqq \alpha)$
$sF(s) - f(0)$	$f'(t)$
$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$	$f''(t)$
$s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$	$f'''(t)$
$\dfrac{1}{s}F(s)$	$\displaystyle\int_0^t f(\tau)d\tau$
$F'(s)$	$-tf(t)$
$\dfrac{d^n}{ds^n}F(s)$	$(-t)^nf(t)$
$F_1(s)F_2(s)$	$(f_1 * f_2)(t) = \displaystyle\int_0^t f_1(t-u)f_2(u)du$

ここで a_1，a_2，a は実数定数，α は正定数，n は自然数とする。