＜ラプラス変換 6 ＞

補題 正定数 $b(>0)$ に対し $I=\displaystyle\int_0^\infty e^{-(\tau-\frac{b}{\tau})^2}d\tau=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

(証明)　$\lambda=\dfrac{b}{\tau}$ とおくと

$$①\ I=\int_0^\infty e^{-(\tau-\frac{b}{\tau})^2}d\tau=\int_\infty^0 e^{-(\frac{b}{\lambda}-\lambda)^2}\left(-\frac{b}{\lambda^2}\right)d\lambda=\int_0^\infty \frac{b}{\lambda^2}e^{-(\lambda-\frac{\lambda}{b})^2}d\lambda$$

τ と λ をおきかえると

$$②\ I=\int_0^\infty e^{-(\tau-\frac{b}{\tau})^2}d\tau=\int_0^\infty e^{-(\lambda-\frac{b}{\lambda})^2}d\lambda$$

①+②より

$$2I=\int_0^\infty(1+\frac{b}{\lambda^2})e^{-(\lambda-\frac{b}{\lambda})^2}d\lambda$$

ここで $x=\lambda-\dfrac{b}{\lambda}$ とおくと $\dfrac{dx}{d\lambda}=1+\dfrac{b}{\lambda^2}$ より

$$2I=\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$$

よって $I=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$　　(証明終)

定理

$$\mathscr{L}\left[\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}t^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}\right]=e^{-\alpha\sqrt{s}}$$

(証明)　$\tau=\dfrac{\alpha}{2\sqrt{t}}$ とおくと $\dfrac{d\tau}{dt}=-\dfrac{\alpha}{4}t^{-\frac{3}{2}}$ より

$$\mathscr{L}\left[\frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}t^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}\right]=\int_0^\infty \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi}}t^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}e^{-st}dt$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_\infty^0 e^{-\tau^2}e^{-s(\frac{\alpha}{2\tau})^2}d\tau$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\tau^2-\left(\frac{\alpha\sqrt{s}}{2\tau}\right)^2}d\tau=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\alpha\sqrt{s}}\int_0^\infty e^{-\left(\tau-\frac{\alpha\sqrt{s}}{2\tau}\right)^2}d\tau$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\alpha\sqrt{s}}\times\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=e^{-\alpha\sqrt{s}}$$　　(証明終)