＜ラプラス変換 5＞

$t \geqq 0$ で定義されている 2 つの関数 $f(t)$，$g(t)$ に対し，$t<0$ では常に $f(t)=0$，$g(t)=0$ と定めると，$f(t)$ と $g(t)$ の合成積は

$$\boxed{(f*g)(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)g(u)du=\int_{0}^{t} f(t-u)g(u)du}$$

となる。これは定義域が $[0,\ \infty)$ である関数の合成積である。ラプラス変換を考えるときは常に $t \geqq 0$ の範囲で考えるので，合成積は $(f*g)(t)=\displaystyle\int_0^t f(t-u)g(u)du \left(=\int_0^t f(u)g(t-u)du\right)$ とする。

$\boxed{9}$

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathscr{L}[f(t)]=F(s),\ \mathscr{L}[g(t)]=G(s)\ \text{のとき}\\[2ex] \mathscr{L}\big[(f*g)(t)\big]=F(s)G(s)\end{array}}$$

(証明)　正定数の σ に対し

$$f_\sigma(t)=\begin{cases} f(t)e^{-\sigma t} & : \ t \geqq 0 \\ 0 & : \ t<0 \end{cases}\quad ,\qquad g_\sigma(t)=\begin{cases} g(t)e^{-\sigma t} & : \ t \geqq 0 \\ 0 & : \ t<0 \end{cases}$$

の合成積は

(i) $t \geqq 0$ のとき $(f_\sigma * g_\sigma)(t)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_\sigma(t-u)g_\sigma(u)du=\int_0^t f_\sigma(t-u)g_\sigma(u)du$

$$=\int_0^t f(t-u)e^{-\sigma(t-u)}g(u)e^{-\sigma u}du=e^{-\sigma t}\int_0^t f(t-u)g(u)du=e^{-\sigma t}(f*g)(t)$$

(ii) $t<0$ のとき $(f_\sigma * g_\sigma)(t)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \underset{\substack{\|\\ 0}}{\underline{f_\sigma(t-u)g_\sigma}}(u)du=0$

一方フーリエ変換の性質より

$$\mathscr{F}\big[(f_\sigma * g_\sigma)(t)\big]=\mathscr{F}\big[f_\sigma(t)\big]\times\mathscr{F}\big[g_\sigma(t)\big] \qquad \cdots(*)$$

$(*)$ 左辺 $=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}(f_\sigma * g_\sigma)(t)e^{-ixt}dt=\int_0^{\infty}(f*g)(t)e^{-\sigma t}e^{-ixt}dt=\mathscr{L}\big[(f*g)(t)\big](\sigma+ix)$

$(*)$ 右辺 $=\displaystyle\int_0^{\infty} f(t)e^{-\sigma t}e^{-ixt}dt\times\int_0^{\infty} g(t)e^{-\sigma t}e^{-ixt}dt=F(\sigma+ix)\times G(\sigma+ix)$

$\sigma+ix=s$ とおくと

$$\mathscr{L}[(f*g)(t)](s)=F(s)\times G(s)$$

(証明終)