

< ラプラス変換 4 >

$\int_0^\infty |f(t)|dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n |f(t)|dt$  が有限の値に収束するとき、関数  $f(t)$  は絶対可積分という。

□7  $f(t)e^{-st}$  および  $f'(t)e^{-st}$  が共に絶対可積分であるとき、

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \text{ であれば } \mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$$

(証明) 絶対可積分より  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)e^{-st} = 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'(t)] &= \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left\{ \left[ f(t)e^{-st} \right]_0^b + \int_0^b f(t)se^{-st}dt \right\} \\ &= 0 - f(0) + s \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \\ &= sF(s) - f(0) \qquad \qquad \qquad (\text{証明終}) \end{aligned}$$

□8  $f(t)e^{-st}$ ,  $f'(t)e^{-st}$ ,  $f''(t)e^{-st}$  が共に絶対可積分であり、

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \text{ であれば } \mathcal{L}[f''(t)] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

(証明) □7より  $\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0)$

よって

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f''(t)] &= \mathcal{L}[(f'(t))'] = s\mathcal{L}[f'(t)] - f'(0) \\ &= s \{ s\mathcal{L}[f(t)] - f(0) \} - f'(0) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0) \end{aligned}$$

問  $f(t)e^{-st}$ ,  $f'(t)e^{-st}$ ,  $f''(t)e^{-st}$ ,  $f'''(t)e^{-st}$  が共に絶対可積分であり、 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$  のとき  $\mathcal{L}[f'''(t)]$  を求めよ。