＜ラプラス変換 3＞

5　$\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$ のとき $\mathscr{L}[tf(t)]=-F'(s)$

(証明)　$F(s)=\displaystyle\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ を s で微分すると

$$F'(s)=\int_0^\infty f(t)(-t)e^{-st}dt=-\int_0^\infty tf(t)dt=-\mathscr{L}[tf(t)]$$

6　$\mathscr{L}[f(t)]=F(s)$ のとき $\mathscr{L}[t^nf(t)]=(-1)^n\dfrac{d^n}{ds^n}F(s)$

問　次のラプラス変換を求めよ。

(1)　$\mathscr{L}[t^2]$

(2)　$\mathscr{L}[t^3]$

(3)　$\mathscr{L}[t^n]$

(4)　$\mathscr{L}[e^{at}]$

(5)　$\mathscr{L}[te^{at}]$

(6)　$\mathscr{L}[t\cos(kt)]$

(7)　$\mathscr{L}[t\sin(kt)]$

(8)　$\mathscr{L}[\sinh(kt)]=\mathscr{L}\left[\dfrac{1}{2}(e^{kt}-e^{-kt})\right]$

(9)　$\mathscr{L}[\cosh(kt)]=\mathscr{L}\left[\dfrac{1}{2}(e^{kt}+e^{-kt})\right]$