＜ラプラス変換 1＞

関数 $f(t)$ のラプラス変換は

$$\mathscr{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

である。ここで s は一般には複素数 $\sigma + ix$ で，その実数部分 σ が正の数である。(これを $\mathrm{Re}(s) > 0$ と書く) ただし，ラプラス変換を求めるときには，複素数であることを意識しなくても良い。s を正の定数と考えて，計算しても良い。

例　$\mathscr{L}[t] = \displaystyle\int_0^\infty te^{-st}dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b te^{-st}dt$

$$= \lim_{b\to\infty}\left\{\left[t \times \frac{1}{-s}e^{-st}\right]_{t=0}^{t=b} + \int_0^b \frac{1}{s}e^{-st}dt\right\}$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left\{-\frac{b}{s}e^{-sb} + \left[-\frac{1}{s^2}e^{-st}\right]_{t=0}^{t=b}\right\}$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left\{\frac{b}{-se^{sb}} - \frac{1}{s^2}e^{-sb} + \frac{1}{s^2}\right\} = \frac{1}{s^2}$$

(注) ここで

$$\lim_{b\to\infty} e^{-sb} = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{e^{sb}} = 0 \quad ,$$

であり，ロピタルの定理より

$$\lim_{b\to\infty}\frac{b}{e^{sb}} = \lim_{b\to\infty}\frac{\frac{d}{db}(b)}{\frac{d}{db}(e^{sb})} = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{se^{sb}} = 0$$

となる。

問　次のラプラス変換を求めよ

(1) $\mathscr{L}[1]$

(2) $\mathscr{L}[e^{-t}]$

(3) $\mathscr{L}[e^{it}]$