< ラプラス変換の導出 >

正定数 $\sigma(>0)$ と関数 $f(t)$ に対して,

$$f_\sigma(t) = \begin{cases} f(t)e^{-\sigma t} & : \quad t \geqq 0 \\ 0 & : \quad t < 0 \end{cases}$$

とおき，$f_\sigma(t)$ のフーリエ変換を $F_\sigma(x)$ とおくと

$$F_\sigma(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\sigma(t)e^{-ixt}dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(\sigma+ix)t}dt$$

となる。$F(s) = \displaystyle\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$ とおくと $F_\sigma(x) = F(\sigma + ix)$ となる。

$F_\sigma(x)$ のフーリエ逆変換は

$$f_\sigma(t) \sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_\sigma(x)e^{ixt}dx$$

となるので $t > 0$ のとき $f_\sigma(t) = f(t)e^{-\sigma t}$ より

$$\begin{aligned} f(t) &\sim \frac{e^{\sigma t}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_\sigma(x)e^{ixt}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_\sigma(x)e^{(\sigma+ix)t}dx \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} F(\sigma+ix)e^{(\sigma+ix)t}dx \qquad\qquad (s = \sigma + ix \text{ とおく}) \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-in}^{\sigma+in} F(s)e^{st}ds \end{aligned}$$

となる。そこで $F(s) = \displaystyle\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$ を**ラプラス変換**といい,

$$\mathscr{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt \quad \Big(= F(s)\Big) \qquad \cdots(\text{ラプラス変換})$$

と書くことにすると，その逆変換は

$$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-in}^{\sigma+in} F(s)e^{st}ds \qquad \cdots(\text{ラプラス逆変換})$$

となる。