< 超関数のフーリエ変換 >

連続関数 $f(t)$ に対してデルタ関数 $\delta(t)$ との合成積は

$$(f * \delta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\delta(t-u)du = f(t)$$

となる。一方デルタ関数は偶関数であるから $\delta(t-u) = \delta(u-t)$ より

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\delta(u-t)du = f(t)$$

である。このデルタ関数に対し，形式的にフーリエ変換を考えると

$$\mathscr{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-ixt}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixu}\delta(u-0)du = e^0 = 1$$

となる。また，t_0 だけ平行移動したデルタ関数 $\delta(t-t_0)$ のフーリエ変換は

$$\mathscr{F}[\delta(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)e^{-ixt}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixu}\delta(u-t_0)du = e^{-ixt_0}$$

となる。次に自然数 n に対して関数 $1_n(t) = \begin{cases} 1 & : \ |t| \leqq n \\ 0 & : \ |t| > n \end{cases}$ のフーリエ変換は

$$\mathscr{F}[1_n(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} 1_n(t)e^{-ixt}dt = \frac{2\sin(nx)}{x}$$

である。定数関数 1 は $1 = \lim_{n\to\infty} 1_n(t)$ であるから，1 のフーリエ変換を

$$\mathscr{F}[1] = \lim_{n\to\infty} \mathscr{F}[1_n(t)] = \lim_{n\to\infty} \frac{2\sin(nx)}{x} = \lim_{n\to\infty} 2\pi\rho_n(x) = 2\pi\delta(x)$$

とする。ここで $\rho_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{\pi x}$ はデルタ収束関数である。また実数定数 α に対し，指数関数 $e^{i\alpha t}$ のフーリエ変換は

$$\mathscr{F}[e^{i\alpha t}] = \lim_{n\to\infty} \mathscr{F}[e^{i\alpha t}1_n(t)] = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} e^{i\alpha t}e^{-ixt}dt$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2\sin n(\alpha - x)}{\alpha - x} = \lim_{n\to\infty} 2\pi\rho_n(x-\alpha) = 2\pi\delta(x-\alpha)$$

となる。

問　$\cos(\alpha t) = \dfrac{1}{2}(e^{i\alpha t} + e^{-i\alpha t})$，$\sin(\alpha t) = \dfrac{1}{2i}(e^{i\alpha t} - e^{-i\alpha t})$ を利用して

次のフーリエ変換を求めよ

$\mathscr{F}[\cos(\alpha t)] =$　　　　　　$\mathscr{F}[\sin(\alpha t)] =$