< フーリエ逆変換 >

フーリエ変換 $\mathscr{F}[f(t)] = F(x)$ に対して、反転公式から

$$\mathscr{F}^{-1}[F(x)] = \frac{f_+(t) + f_-(t)}{2}$$

である。ここで $f(t)$ が連続関数のときは $f_+(t) = f_-(t) = f(t)$ であるから

反転公式は

$$\mathscr{F}^{-1}[F(x)] = f(t) \qquad (f(t) \text{ が連続のとき})$$

となる。

例 1　$f(t) = e^{-|t|}$ は連続関数で $\mathscr{F}\left[e^{-|t|}\right] = \dfrac{2}{x^2+1}$ であるから

$$\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{2}{x^2+1}\right] = e^{-|t|}$$

問 1　次のフーリエ逆変換を求めよ。(ただし $\alpha > 0$)

(1) $\mathscr{F}^{-1}\left[\dfrac{2\alpha}{x^2+\alpha^2}\right]$

(2) $\mathscr{F}^{-1}\left[\sqrt{\pi}e^{-\frac{x^2}{4}}\right]$

(3) $\mathscr{F}^{-1}\left[\dfrac{2\sin(4x)}{x}\right]$

例 2　$\mathscr{F}^{-1}[F_1(x)] = f_1(t),\ \mathscr{F}^{-1}[F_2(x)] = f_2(t)$ のとき $\mathscr{F}^{-1}[a_1F_1(x) + a_2F_2(x)] = a_1f_1(t) + a_2f_2(t)$ より

$$\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{1}{x^2+9} + \frac{1}{x^2+1}\right] = \frac{1}{6}\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{6}{x^2+9}\right] + \frac{1}{2}\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{2}{x^2+1}\right]$$

$$= \frac{1}{6}e^{-3|t|} + \frac{1}{2}e^{-|t|}$$

問 2　次のフーリエ逆変換を求めよ。

$$\mathscr{F}^{-1}\left[\frac{3}{x^2+1} + e^{-x^2}\right]$$