< フーリエ逆変換の収束 >

$f(t)$ のフーリエ変換 $\mathscr{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt = F(x)$ に対しフーリエ逆変換を

$$\boxed{\mathscr{F}^{-1}[F(x)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{ixt}dx} \qquad \text{（フーリエ逆変換）}$$

と書くことにする。

補題　$\mathscr{F}[f(t)] = F(x)$ のとき

$$\mathscr{F}^{-1}[F(x)] = \lim_{n\to\infty}\Big(f*\rho_n\Big)(t) \quad , \quad \rho_n(t) = \frac{\sin(nt)}{\pi t}$$

[証明]　$\mathscr{F}^{-1}[F(x)] = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} F(x)e^{ixt}dx$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-ixu}du\right\}e^{ixt}dx$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} e^{ix(t-u)}dx\right\}du$$

ここで $\frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} e^{ixa}dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{ia}e^{ixa}\right]_{-n}^{n}$

$$= \frac{1}{2\pi ia}\left\{e^{ina} - e^{-ina}\right\} = \frac{2i\sin(na)}{2\pi ia} = \frac{\sin(na)}{\pi a} = \rho_n(a)$$

よって　$\mathscr{F}^{-1}[F(x)] = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\rho_n(t-u)du = \lim_{n\to\infty}(f*\rho_n)(t)$

（証明終）

補題の $\rho_n(t)$ はデルタ収束関数列であるから $\lim_{n\to\infty}(f*\rho_n)(t) = \frac{f_+(t)+f_-(t)}{2}$ が成り立つ。

定理　$\mathscr{F}[f(t)] = F(x)$ のとき

$$\mathscr{F}^{-1}[F(x)] = (f*\delta)(t) = \frac{f_+(t)+f_-(t)}{2} \qquad \text{(反転公式)}$$

この定理を反転公式という。$f(t)$ が 48 ページ 図 1 のような関数のとき $(f*\rho_n)(t)$ は 48 ページ 図 11, 図 12 のような曲線の形をとりながら連続点では $f(t)$ に近づき、不連続点では $\frac{1}{2}\{f_+(t)+f_-(t)\}$ (左極限と右極限の中点) に近づく。
このような収束はフーリエ級数の収束と同様である。(P80 参照)