

< デルタ関数 >

前ページのデルタ収束関数列 $\{\rho_n(t)\}$ は

(i) $\rho_n(t)$ は偶関数

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} \rho_n(t) dt = 1$

(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n(t) = \begin{cases} +\infty & : t = 0 \\ 0 & : t \neq 0 \end{cases}$

(iv) 関数 $f(t)$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f * \rho_n)(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \rho_n(t-u) du = \frac{f_+(t) + f_-(t)}{2}$$

を満たす関数列である。 $n \rightarrow \infty$ のときの極限を関数の一種と考え、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n(t) = \delta(t) = \begin{cases} +\infty & : t = 0 \\ 0 & : t \neq 0 \end{cases} \quad (\text{デルタ関数})$$

と書き、ディラックの**デルタ関数**という。デルタ収束関数列の性質からデルタ関数も偶関数 ($\delta(-t) = \delta(t)$) で次式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$(f * \delta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \delta(t-u) du = \frac{f_+(t) + f_-(t)}{2}$$

を満たす。デルタ関数は普通の意味の関数ではない。デルタ関数のような関数は一般に**超関数**と呼ばれる。

問 1 $f(t)$ が連続関数のとき、 $(f * \delta)(t)$ を簡単な式で表せ。

問 2 $f(t) = t^3$ のとき $(f * \delta)(2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \delta(2-u) du$ の値を求めよ。

問 3 次式の値を求めよ。

$$(1) \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{\pi}{2} - u\right) \sin u \, du \qquad (2) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u-2) u^5 \, du$$