＜デルタ収束関数列 2＞

関数列 $\{\varphi_n(t)\}(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が**デルタ収束関数列**であるとは，次の条件

(☆) $\boxed{\text{ほとんどの関数 } f(t) \text{ に対し } \lim_{n\to\infty}(f*\varphi_n)(t) = \frac{1}{2}\{f_+(t)+f_-(t)\}}$

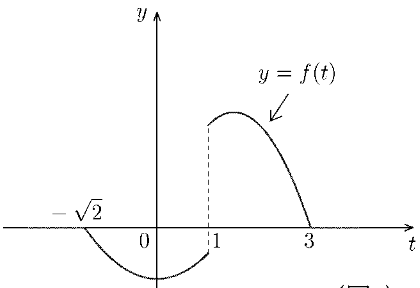
を満たすときとする。
どのような関数列が (☆) 式を満たすのだろうか？例でイメージをつかんでほしい。

例　① $h_n(t) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & : |t| \leqq \dfrac{1}{n} \\ 0 & : |t| > \dfrac{1}{n} \end{cases}$　② $g_n(t) = \dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{n}{4}t^2}$　③ $\rho_n(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(nt)}{\pi t} & : t \neq 0 \\ \dfrac{n}{\pi} & : t = 0 \end{cases}$

これらの関数列はいずれもデルタ収束関数列である。

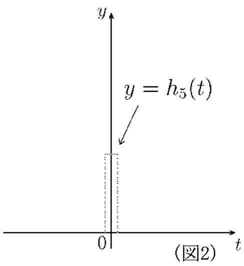
(注)　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\rho_n(t)dt = 1,\ \int_{-\infty}^{\infty}g_n(t)dt = 1$ は 34, 35 ページの結果よりわかる。

① 関数 $h_n(t)$ のグラフは図 2$(n=5)$，図 4$(n=13)$ である。
② 関数 $g_n(t)$ のグラフは図 6$(n=60)$，図 8$(n=500)$ である。
③ 関数 $\rho_n(t)$ のグラフは図 10$(n=10)$，図 12$(n=20)$ である。

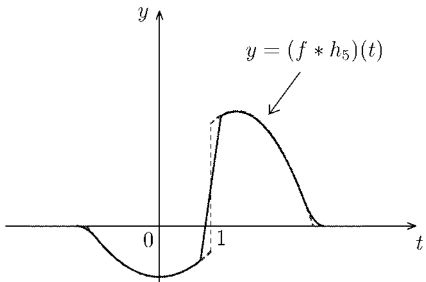


(図1)

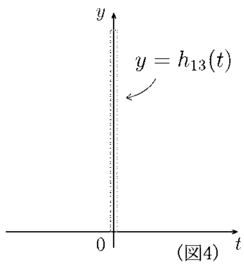
関数 $f(t)$ のグラフが図 1 のような場合を考える。
デルタ収束関数との合成積のグラフが図 3，5，7，9，11，13 の実線である。(その図の点線は $f(t)$ のグラフである。)
(☆) 式が成り立つ様子を見てほしい。



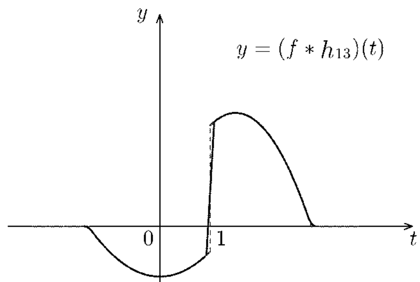
(図2)



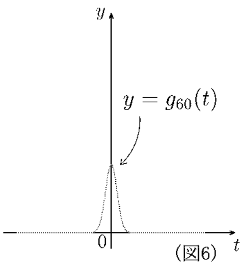
(図3)



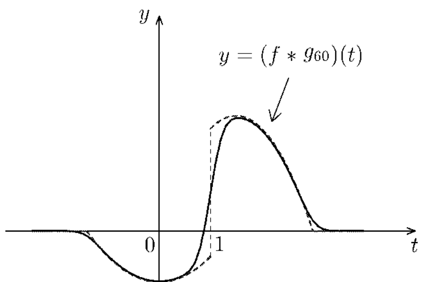
(図4)



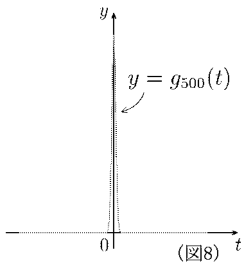
(図5)



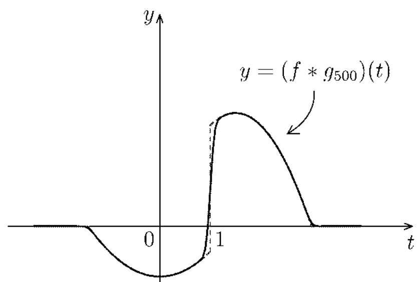
(図6)



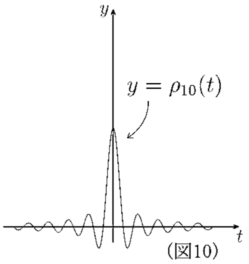
(図7)



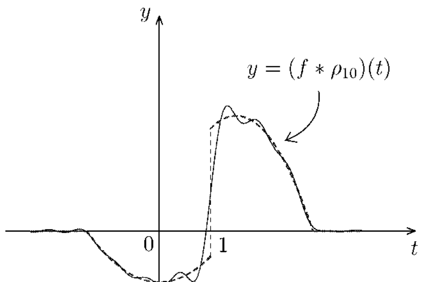
(図8)



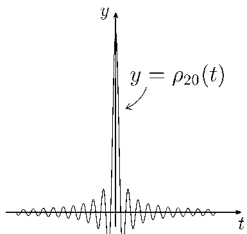
(図9)



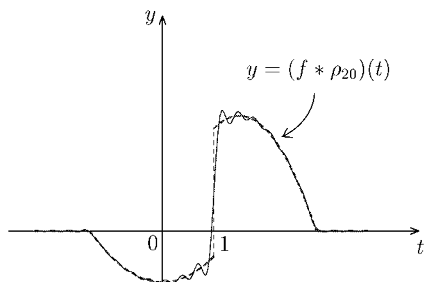
(図10)



(図11)



(図12)



(図13)