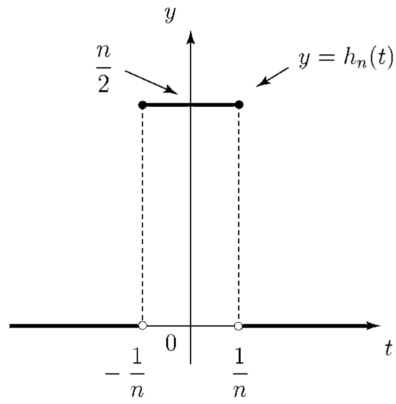
＜デルタ収束関数列 1＞



例　自然数 n に対し、関数

$$h_n(t)=\begin{cases}\frac{n}{2} & : \ |t| \leqq \frac{1}{n}\\ 0 & : \ |t| > \frac{1}{n}\end{cases}$$

は次の条件 (i)〜(iv) をみたす。

(i)　$h_n(t)$ は偶関数で $h_n(t) \geqq 0$

(ii)　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} h_n(t)dt = 1$

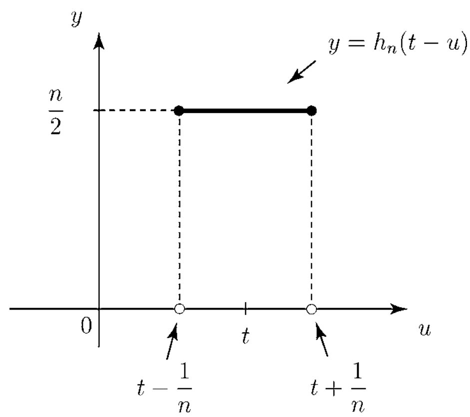
(iii)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} h_n(t) = \begin{cases} +\infty & : \ t=0\\ 0 & : \ t\neq 0\end{cases}$

(iv)　ほとんどの関数 $f(t)$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}(f*h_n)(t) = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)h_n(t-u)du = \frac{1}{2}\{f_+(t)+f_-(t)\}$$

(注)　(iv) の関数 $f(t)$ は、正確には「積分可能で、各 t で左右の極限値 $f_-(t)=\displaystyle\lim_{s\to t-0} f(s)$ ， $f_+(t)=\displaystyle\lim_{s\to t+0} f(s)$ が存在する関数」という条件が必要である。

[(iv) の証明]



$F(t)=\displaystyle\int f(t)dt$ とおく。

$$(f*h_n)(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(u)h_n(t-u)du=\int_{t-\frac{1}{n}}^{t+\frac{1}{n}} f(u)\frac{n}{2}du$$

$$=\frac{n}{2}[F(u)]_{t-\frac{1}{n}}^{t+\frac{1}{n}}=\frac{n}{2}\left\{F\left(t+\frac{1}{n}\right)-F\left(t-\frac{1}{n}\right)\right\}$$

ここで $n\to\infty$ とする。$h=\dfrac{1}{n}\to+0$ (0 への右極限) よりロピタルの定理を使うと

$$\lim_{n\to\infty}(f*h_n)(t)=\lim_{n\to\infty}\frac{F(t+\frac{1}{n})-F(t-\frac{1}{n})}{2\times\frac{1}{n}}=\lim_{h\to+0}\frac{F(t+h)-F(t-h)}{2h}$$

$$=\lim_{h\to+0}\frac{\frac{\partial}{\partial h}\{F(t+h)-F(t-h)\}}{\frac{\partial}{\partial h}(2h)}=\lim_{h\to+0}\frac{f(t+h)+f(t-h)}{2}=\frac{f_+(t)+f_-(t)}{2}$$

(証明終)

例の (iv) をみたす関数列 $\{h_n(t)\}$ を**デルタ収束関数列**という。