< 合成積 >

$-\infty < t < \infty$ の範囲で定義されている 2 つの関数 $f_1(t)$, $f_2(t)$ に対して

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-u) f_2(u) du$$

を f_1 と f_2 の「**合成積**」($convolution$) または「**たたみこみ**」という。

◎ $(f_1 * f_2)(t) = (f_2 * f_1)(t)$

[証明] $(f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-u) f_2(u) du$ 　　ここで $t-u=s$ とおくと

$$= \int_{\infty}^{-\infty} f_1(s) f_2(t-s)(-1) ds = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t-s) f_1(s) ds = (f_2 * f_1)(t)$$

定理 　$\mathscr{F}[f_1(t)] = F_1(x)$, $\mathscr{F}[f_2(t)] = F_2(x)$ のとき

$$\mathscr{F}[(f_1 * f_2)(t)] = F_1(x) F_2(x)$$

[証明]

$$\mathscr{F}[(f_1 * f_2)(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} (f_1 * f_2)(t) e^{-ixt} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-u) f_2(u) du \right\} e^{-ixt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-u) e^{-ixt} dt \right\} f_2(u) du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-u) e^{-ix(t-u)} dt \right\} f_2(u) e^{-ixu} du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(s) e^{-ixs} ds \right\} f_2(u) e^{-ixu} du = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x) f_2(u) e^{-ixu} du$$

$$= F_1(x) \int_{-\infty}^{\infty} f_2(u) e^{-ixu} du = F_1(x) F_2(x)$$

(証明終)