< フーリエ変換 6 >

例　$\mathscr{F}\left[e^{-t^2}\right]$ を求めたい。$\mathscr{F}\left[e^{-t^2}\right]=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}e^{-ixt}dt=F(x)$ とおく。

$$\frac{d}{dx}F(x)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}\left(\frac{d}{dx}e^{-ixt}\right)dt=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}(-it)e^{-ixt}dt$$
$$=\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(-2t)e^{-t^2}e^{-ixt}dt=\frac{i}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-t^2}\right)'e^{-ixt}dt=\frac{i}{2}\mathscr{F}\left[\left(e^{-t^2}\right)'\right]$$

ここで 42 ページ系 1 より $\mathscr{F}\left[\left(e^{-t^2}\right)'\right]=ix\mathscr{F}\left[e^{-t^2}\right]$ だから

$$\frac{d}{dx}F(x)=\frac{i}{2}\times ix\mathscr{F}\left[e^{-t^2}\right]=-\frac{x}{2}F(x)$$

となる。微分方程式 $\frac{d}{dx}F(x)=-\frac{x}{2}F(x)$ の解は

$$F(x)=Ce^{-\frac{x^2}{4}} \qquad (C \text{ は定数})$$

である。ここで $F(0)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}e^{0}dt=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}dt=2\int_{0}^{\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$ より $C=\sqrt{\pi}$ 。

よって

$$\mathscr{F}\left[e^{-t^2}\right]=F(x)=\sqrt{\pi}e^{-\frac{x^2}{4}}$$

問　正定数 α に対して $\mathscr{F}\left[e^{-\alpha t^2}\right]$ を求めよ。