< フーリエ変換 5 >

系 3 $f(t)$, $tf(t)$ が共に絶対可積分であり、$\mathscr{F}[f(t)] = F(x)$ であるとき、

$$\frac{d}{dx}F(x) = \mathscr{F}[-itf(t)]$$

[証明の概略]

$$\frac{d}{dx}F(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i(x+h)t}dt - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt\right\}$$

$$= \lim_{h\to 0}\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M} f(t)e^{-ixt}\frac{e^{-iht}-1}{h}dt$$

$$= \lim_{h\to 0}\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M} f(t)e^{-ixt}\left\{t\times\frac{\cos(ht)-1}{ht} - it\times\frac{\sin(ht)}{ht}\right\}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}(-it)dt = \mathscr{F}[-itf(t)]$$

正確には $\displaystyle\lim_{M\to\infty}\int_{|t|>M}|tf(t)|dt = 0$ を用いて評価する。

例 $\mathscr{F}[f(t)] = F(x)$ のとき、定数 $\alpha(\neq 0)$ に対して

$$\mathscr{F}[f(\alpha t)] = \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{x}{\alpha}\right)$$

[証明]

$$\mathscr{F}[f(\alpha t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha t)e^{-ixt}dt$$

ここで $\alpha t = u$ とおくと $t = \dfrac{u}{\alpha}$, $dt = \dfrac{1}{\alpha}du$ より

$$\mathscr{F}[f(\alpha t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-ix\frac{u}{\alpha}}\frac{1}{\alpha}du = \frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\frac{x}{\alpha}u}du = \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{x}{\alpha}\right)$$