＜フーリエ変換 4＞

定義域が $-\infty < t < \infty$ である関数 $f(t)$ が $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dx < +\infty$ であるとき、$f(t)$ は **絶対可積分**であると言う。次が成り立つ。

> **定理**　$f(t)$ が絶対可積分であれば、次が成立する。
>
> (1) $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0 \quad , \quad \lim_{t\to-\infty} f(t) = 0$
>
> (2) $\mathscr{F}[f(t)] = F(x)$ は有界で連続。
>
> (3) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$

(注)　(3) をリーマン・ルベーグの補題という。

系 1　$f(t)$, $f'(t)$ が共に絶対可積分ならば

$$\mathscr{F}[f'(t)] = ix\mathscr{F}[f(t)]$$

[証明]

$$\mathscr{F}[f'(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-ixt}dt = \lim_{\substack{b\to+\infty \\ a\to-\infty}} \int_a^b f'(t)e^{-ixt}dt$$

$$= \lim_{\substack{b\to+\infty \\ a\to-\infty}} \left\{ \left[f(t)e^{-ixt}\right]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b f(t)(-ix)e^{-ixt}dt \right\}$$

$$= \lim_{\substack{b\to+\infty \\ a\to-\infty}} \left\{ f(b)e^{-ixb} - f(a)e^{-ixa} \right\} + ix\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt = ix\mathscr{F}[f(t)]$$

(証明終)

系 2　$f(t)$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{t} f(u)du$ が共に絶対可積分ならば

$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t} f(u)du\right] = \frac{1}{ix}\mathscr{F}[f(t)]$$

(証明略)