＜ フーリエ変換 3 ＞

例

$$\mathscr{F}[e^{-|t|}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|}e^{-ixt}dt = \lim_{\substack{b\to+\infty \\ a\to-\infty}} \int_a^b e^{-|t|}e^{-ixt}dt$$

$$= \lim_{\substack{b\to+\infty \\ a\to-\infty}} \left\{ \int_a^0 e^t e^{-ixt}dt + \int_0^b e^{-t}e^{-ixt}dt \right\}$$

$$= \lim_{\substack{b\to+\infty \\ a\to-\infty}} \left\{ \left[\frac{1}{1-ix} e^{(1-ix)t} \right]_{t=a}^{t=0} + \left[\frac{1}{-(1+ix)} e^{-(1+ix)t} \right]_{t=0}^{t=b} \right\}$$

$$= \lim_{\substack{b\to+\infty \\ a\to-\infty}} \left\{ \frac{1}{1-ix} - \frac{1}{1-ix}e^{(1-ix)a} - \frac{1}{1+ix}e^{-(1+ix)b} + \frac{1}{1+ix} \right\}$$

ここで

$$\lim_{b\to+\infty} e^{-(1+ix)b} = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{e^b} \left(\cos(xb) + i\sin(xb) \right) = 0$$

$$\lim_{a\to-\infty} e^{(1-ix)a} = \lim_{a\to-\infty} e^a \left(\cos(xa) - i\sin(xa) \right) = 0$$

より

$$\mathscr{F}\left[e^{-|t|}\right] = \frac{1}{1-ix} + \frac{1}{1+ix} = \frac{2}{1+x^2}$$

問　正定数 $\alpha > 0$ に対して $\mathscr{F}\left[e^{-\alpha|t|}\right]$ を求めよ。