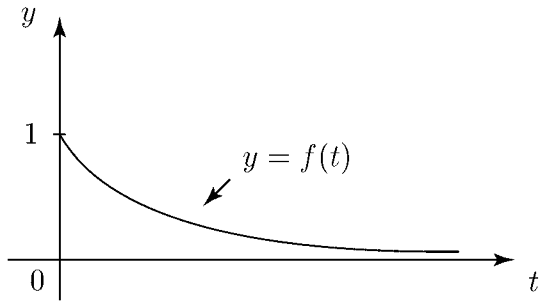
＜ フーリエ変換 2 ＞



例　正定数 $\alpha(>0)$ に対し

$$f(t)=\begin{cases} e^{-\alpha t} & : \ t \geqq 0 \\ 0 & : \ t<0 \end{cases}$$

のとき、$f(t)$ のフーリエ変換は

$$\mathscr{F}[f(t)]=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt=\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t}e^{-ixt}dt$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-(\alpha+ix)t}dt=\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{-(\alpha+ix)}e^{-(\alpha+ix)t}\right]_0^b$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left\{-\frac{1}{\alpha+ix}e^{-(\alpha+ix)b}+\frac{1}{\alpha+ix}\right\}$$

ここで $\displaystyle\lim_{b\to+\infty} e^{-(\alpha+ix)b}=\lim_{b\to+\infty} e^{-\alpha b}\times e^{-ixb}$

$$=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{e^{\alpha b}}(\cos(xb)-i\sin(xb))=0$$

より $\mathscr{F}[f(t)]=\dfrac{1}{\alpha+ix}$

問　正定数 $\alpha>0$ に対し $f(t)=\begin{cases} 0 & : \ t>0 \\ e^{\alpha t} & : \ t \leqq 0 \end{cases}$ のときフーリエ変換 $\mathscr{F}[f(t)]$ を求めよ。