< フーリエ変換 1 >

$f(t)$ のフーリエ変換 $F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt$ を

$$\boxed{\mathscr{F}\left[f(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt} \qquad (f(t) \text{ のフーリエ変換})$$

と書くことにする。

例　オイラーの公式より

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta$$

であるから、$f(t)$ のフーリエ変換は

$$\mathscr{F}\left[f(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left\{\cos(xt) - i\sin(xt)\right\}dt$$

と書きなおせる。

今 $f(t)$ が偶関数であれば $f(t)\cos(xt)$ も偶関数であり、$f(t)\sin(xt)$ は奇関数であるから

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(xt)dt = 2\int_{0}^{\infty} f(t)\cos(xt)dt \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(xt)dt = 0$$

となる。従ってこのときのフーリエ変換は

$$\mathscr{F}\left[f(t)\right] = 2\int_{0}^{\infty} f(t)\cos(xt)dt \quad \cdots \quad \text{偶関数のフーリエ変換}$$

となる。

問 1　$f(t)$ が奇関数のとき、フーリエ変換 $\mathscr{F}[f(t)]$ を例のように簡単にせよ。

問 2　定数 $T > 0$ に対し、

$$f(t) = \begin{cases} 1 & : \ |t| \leqq T \\ 0 & : \ |t| > T \end{cases}$$

とする。このとき $\mathscr{F}[f(t)]$ を求めよ。