< フーリエ変換の定義 >

前ページの結果より

$$(*)\quad \boxed{\, f(t) \sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{ixt}dx \ , \quad F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt \,}$$

が得られた。$F(x)$ を $f(x)$ の**フーリエ変換**という。また $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{ixt}dx$ を**フーリエ逆変換**という。フーリエ変換にはいろいろな定義式があるが，このワークブックでは $(*)$ 式を用いることにする。

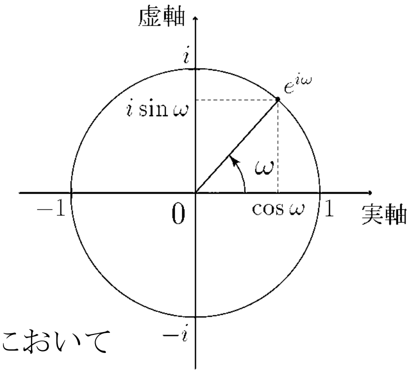
(注 1) 信号処理や通信理論の本では $(*)$ 式の変数 x を ω で表す場合が多い。$(*)$ 式のかわりに

$$(*)'\quad \boxed{\, f(t) \sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega \ , \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \,}$$

を用いる。t が時間を表す変数の場合に，ω を**角周波数**という。t の単位が秒であれば，関数

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$$

は複素平面上の単位円を 1 秒間に角度 ω だけ回転する。



(注 2) フーリエ変換の別の定義式を紹介しておく。$(*)'$ 式において

$$\ell = \frac{\omega}{2\pi} \ , \quad \mathcal{F}(\ell) = F(2\pi\ell) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi\ell t}dt$$

とおくと $\omega = 2\pi\ell$，$d\omega = 2\pi d\ell$ より

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(2\pi\ell)e^{i2\pi\ell t}2\pi d\ell = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\ell)e^{i2\pi\ell t}d\ell$$

となるので，$(*)'$ は

$$(**)\quad \boxed{\, f(t) \sim \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\ell)e^{i2\pi\ell t}d\ell \ , \quad \mathcal{F}(\ell) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi\ell t}dt \,}$$

と書きなおせる。$(**)$ もフーリエ変換の定義式としてよく使われる。t が時間を示す変数のとき，ℓ を**周波数**という。関数 $e^{i2\pi\ell t}$

$$e^{i2\pi\ell t} = \cos(2\pi\ell t) + i\sin(2\pi\ell t)$$

の実部 $\cos(2\pi\ell t)$ と虚部 $\sin(2\pi\ell t)$ は基本周期が $\dfrac{1}{\ell}$ である。t の単位が秒であれば，1 秒間に基本波形が ℓ 回現れる。