< フーリエ変換の導出 >

周期 L の周期関数 $f(t)$ のフーリエ級数は

$$\boxed{f(t) \quad \sim \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega t}} \quad \text{(フーリエ級数)}$$

であった。ここで

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{L} \quad , \quad C_k = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)e^{-ik\omega t}dt} \quad \text{(フーリエ係数)}$$

である。

$f(t)$ が周期関数でないときは，$f(t)$ をフーリエ級数では表現できない。そのときは周期 L が無限大 $(=\infty)$ の関数と考え，$L \to \infty$ の極限を考える。

$$F_L(x) = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)e^{-ixt}dt \quad , \quad F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt$$

とおくと $\omega = \dfrac{2\pi}{L}$ より

$$C_k = \frac{1}{L}F_L(k\omega) = \frac{\omega}{2\pi}F_L(k\omega)$$

である。ここで $\omega = \Delta x$ とおくと $L \to \infty$ のとき $\Delta x \to 0$ であり，$F_L(x) \to F(x)$ であるから，前ページより

$$\begin{aligned} f(t) &\sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{2\pi}F_L(k\omega)e^{ik\omega t} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}F_L(k\Delta x)e^{ik\Delta x t}\Delta x \ \longrightarrow \ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}F(x)e^{ixt}dx \end{aligned}$$

と考えられる。従って

$$\boxed{f(t) \sim \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{ixt}dx \quad , \quad F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt}$$

が得られる。