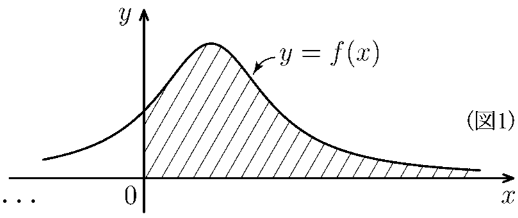
< 広義積分の近似 >

$f(x) \geqq 0$ のとき $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx$ は図 1 の斜線部分の面積を意味する。これを図 2 のように底辺が Δx の長方形の面積の和で近似する。すなわち

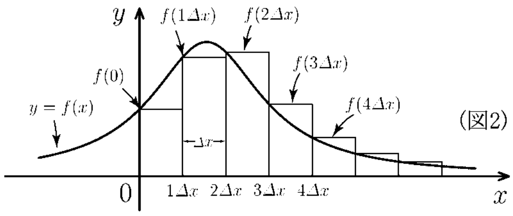
$$\int_0^{\infty} f(x)dx \fallingdotseq f(0)\Delta x + f(1\Delta x)\Delta x + f(2\Delta x)\Delta x + \cdots$$

$$\cdots + f(k\Delta x)\Delta x + \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f(k\Delta x)\Delta x$$



(図1)



(図2)

ここで底辺の幅 Δx を小さくすれば, 図 3 , 4 のように図 1 の面積 $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx$ に近づく。

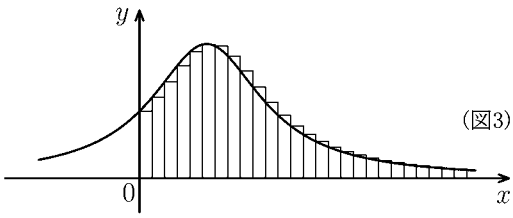
一般に次の定理がなりたつ。

[定理 1] $$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=0}^{\infty} f(k\Delta x)\Delta x = \int_0^{\infty} f(x)dx}$$

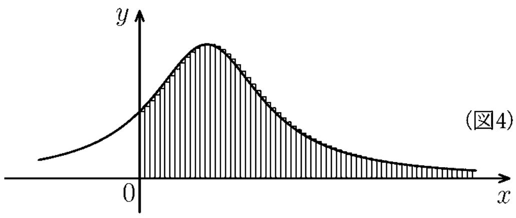
この定理は $f(x) \geqq 0$ でなくても $\displaystyle\int_0^{\infty} |f(x)|dx$ が有限の値であれば成立する。

同様にして次の定理も成立する。

[定理 2] $$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta x)\Delta x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx}$$



(図3)



(図4)

例

(1) $$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\pi k \Delta x} \sin(\alpha k \Delta x)\Delta x = \int_0^{\infty} e^{-\pi x} \sin(\alpha x)dx$$

(2) $$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\beta (k\Delta x)^2} k(\Delta x)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta x^2} x dx$$

(3) $$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta x) e^{itk\Delta x}\Delta x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{itx}dx$$

(注) このような問題は $k\Delta x \to x$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \boxed{}\,\Delta x \to \int_0^{\infty} \boxed{}\,dx$, $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \boxed{}\,\Delta x \to \int_{-\infty}^{\infty} \boxed{}\,dx$

とおきかえればよい。

問　次の極限を広義積分で表せ。

(1) $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(\alpha k \Delta x)\Delta x}{1 + (k\Delta x)^2}$　　(2) $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k\Delta x)e^{ik\Delta x t}\Delta x$