＜広義積分 3＞

定理　$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

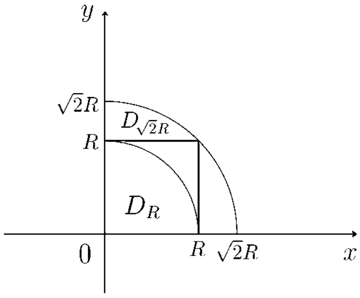
＜証明＞

$$\left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)^2 = \lim_{R\to\infty}\left(\int_0^R e^{-x^2}dx\right)^2 = \lim_{R\to\infty}\left(\int_0^R\int_0^R e^{-x^2-y^2}dxdy\right)$$

$$D_R = \{(x,\ y)\ :\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x^2+y^2 \leqq R^2\}$$

とおくと

$$D_R \subset \{(x,\ y)\ :\ 0 \leqq x \leqq R,\ 0 \leqq y \leqq R\} \subset D_{\sqrt{2}R}$$



より

$$\iint_{D_R} e^{-x^2-y^2}dxdy \leqq \int_0^R\int_0^R e^{-x^2-y^2}dxdy \leqq \iint_{D_{\sqrt{2}R}} e^{-x^2-y^2}dxdy$$

である。$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ と変数変換すると $\dfrac{\partial(x,\ y)}{\partial(r,\ \theta)} = r$ より

$$\iint_{D_R} e^{-x^2-y^2}dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^r e^{-r^2}rdr = \frac{\pi}{2}\times\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_{r=0}^{r=R} = \frac{\pi}{4}\left(1-e^{-R^2}\right)$$

であるから

$$\lim_{R\to\infty}\left(\int_0^R\int_0^R e^{-x^2-y^2}dxdy\right) = \lim_{R\to\infty}\iint_{D_R} e^{-x^2-y^2}dxdy$$

$$= \lim_{R\to\infty}\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-R^2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

よって　$\displaystyle\left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)^2 = \frac{\pi}{4}$

より定理が示される。

(注)　e^{-x^2} や $\dfrac{\sin x}{x}$ の不定積分は初等関数では表されないことがわかっている。