< 広義積分 1 >

積分範囲が無限区間である定積分を次式で定め，**広義の定積分**または**広義積分**という。

$$\int_a^{\infty} f(t)dt = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(t)dt \ , \quad \int_{-\infty}^{b} f(t)dt = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(t)dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \lim_{\substack{b\to+\infty \\ a\to-\infty}}\int_a^b f(t)dt$$

例 1 $\displaystyle \int_0^{\infty} te^{-2t}dt = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b te^{-2t}dt = \lim_{b\to+\infty}\left\{\left[t\left(-\frac{1}{2}e^{-2t}\right)\right]_0^b - \int_0^b\left(-\frac{1}{2}e^{-2t}\right)dt\right\}$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left\{-\frac{b}{2e^{2b}} + \left[-\frac{1}{4}e^{-2t}\right]_0^b\right\} = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{4e^{2b}}+\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

例 2 $\displaystyle \int_{-\infty}^{0} e^{(2+3i)t}dt = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 e^{(2+3i)t}dt = \lim_{a\to-\infty}\left[\frac{1}{2+3i}e^{(2+3i)t}\right]_a^0$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left\{\frac{1}{2+3i} - \frac{1}{2+3i}e^{(2+3i)a}\right\} = \frac{1}{2+3i}$$

問　次の値を求めよ。ただし $\alpha>0,\ \beta>0,\ i=\sqrt{-1}$ とする。

(1) $\displaystyle \int_0^{\infty} e^{-\alpha t}dt$

(2) $\displaystyle \int_{-\infty}^{0} e^{\beta t}dt$

(3) $\displaystyle \int_0^{\infty} te^{-t}dt$

(4) $\displaystyle \int_0^{\infty} e^{-(2+3i)t}dt$

(5) $\displaystyle \int_{-\infty}^{0} e^{(\alpha+\beta i)t}dt$