< 極限 >

$x \to +\infty,\ x \to -\infty$ のときの極限を復習する。

① $0 < r < 1$ のとき　$\lim_{x\to+\infty} r^x = 0$,　$\lim_{x\to-\infty} r^x = \lim_{y\to+\infty} \left(\frac{1}{r}\right)^y = +\infty$

② $r > 1$ のとき　$\lim_{x\to+\infty} r^x = +\infty$,　$\lim_{x\to-\infty} r^x = \lim_{y\to+\infty} \left(\frac{1}{r}\right)^y = 0$

例 1　$\lim_{b\to+\infty} e^{-2b} = 0$,　$\lim_{a\to-\infty} e^{-2a} = +\infty$

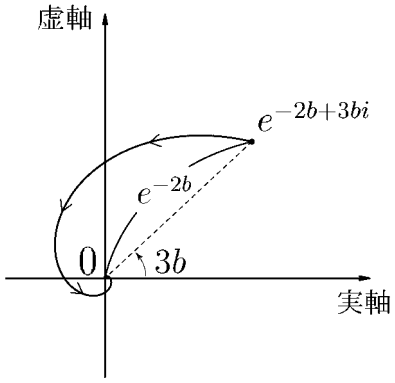
例 2　$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{2x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{d}{dx}x}{\frac{d}{dx}e^{2x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2e^{2x}} = 0$　　(ロピタルの定理 (P82) より)

例 3　$\lim_{b\to+\infty} e^{(-2+3i)b} = \lim_{b\to+\infty} e^{-2b} \times \{\cos(3b) + i\sin(3b)\}$

ここで $|\cos(3b) + i\sin(3b)| = 1$ より

$\lim_{b\to+\infty} \left|e^{(-2+3i)b}\right| = \lim_{b\to+\infty} e^{-2b} = 0$

よって　$\lim_{b\to+\infty} e^{(-2+3i)b} = 0$



(注)　例 3 の収束は複素平面上の点が原点 0 に近づくことを意味する。

問　次の極限値を求めよ。ここで $\alpha,\ \beta > 0$ とする。

(1) $\lim_{b\to+\infty} e^{-\alpha b}$　　(2) $\lim_{b\to+\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^{\beta b}$

(3) $\lim_{a\to-\infty} e^{\beta a}$　　(4) $\lim_{a\to-\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^{\beta a}$

(5) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}$　　(6) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x}$

(7) $\lim_{b\to+\infty} e^{-(2+3i)b}$　　(8) $\lim_{a\to-\infty} \frac{1}{2+3i} e^{(2+3i)a}$