< 複素数値関数の微分·積分 >

実変数 t の実数値関数 $x(t),\ y(t)$ と虚数単位 $i=\sqrt{-1}$ に対し，複素数値関数 $z(t)=x(t)+iy(t)$ の微分と積分を

$$\frac{dz(t)}{dt}=\frac{dx(t)}{dt}+i\frac{dy(t)}{dt}\ ,\quad \int z(t)dt=\int x(t)dt+i\int y(t)dt\quad ,$$

$$\int_a^b z(t)dt=\int_a^b x(t)dt+i\int_a^b y(t)dt$$

と定義する。

例 1　実数定数 $\alpha,\ \beta$ に対して $z(t)=\dfrac{1}{\alpha+\beta i}e^{(\alpha+\beta i)t}$ とおくと

$$\frac{dz(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\alpha+\beta i}e^{(\alpha+\beta i)t}\right)$$

$$=\frac{d}{dt}\left\{\frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2+\beta^2}\left(\alpha\cos(\beta t)+\beta\sin(\beta t)\right)\right\}+i\frac{d}{dt}\left\{\frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2+\beta^2}\left(\alpha\sin(\beta t)-\beta\cos(\beta t)\right)\right\}$$

$$=\frac{\alpha e^{\alpha t}}{\alpha^2+\beta^2}\left(\alpha\cos(\beta t)+\beta\sin(\beta t)\right)+\frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2+\beta^2}\left(-\alpha\beta\sin(\beta t)+\beta^2\cos(\beta t)\right)$$

$$+i\left\{\frac{\alpha e^{\alpha t}}{\alpha^2+\beta^2}\left(\alpha\sin(\beta t)-\beta\sin(\beta t)\right)+\frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2+\beta^2}\left(\alpha\beta\cos(\beta t)+\beta^2\sin(\beta t)\right)\right\}$$

$$=e^{\alpha t}\cos(\beta t)+ie^{\alpha t}\sin(\beta t)=e^{(\alpha+\beta i)t}$$

となる。従って

$$\int_a^b e^{(\alpha+\beta i)t}dt=\int_a^b e^{\alpha t}\cos(\beta t)dt+i\int_a^b e^{\alpha t}\sin(\beta t)dt$$

$$=\left[\frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2+\beta^2}\Big(\alpha\cos(\beta t)+\beta\sin(\beta t)\Big)\right]_a^b+i\left[\frac{e^{\alpha t}}{\alpha^2+\beta^2}\Big(\alpha\sin(\beta t)-\beta\cos(\beta t)\Big)\right]_a^b$$

$$=\left[\frac{1}{\alpha+\beta i}e^{(\alpha+\beta i)t}\right]_a^b$$

例 2　$\displaystyle\int_0^n e^{(2+3i)t}dt=\left[\frac{1}{2+3i}e^{(2+3i)t}\right]_0^n=\frac{1}{2+3i}\left(e^{(2+3i)n}-1\right)$

問　次の定積分を求めよ。(ここで n は正の定数である)

(1) $\displaystyle\int_{-1}^0 e^{(\alpha+\beta i)t}dt$

(2) $\displaystyle\int_0^n e^{(-2+3i)t}dt$