＜フリーエ級数の練習＞

問 1　自然数 n と実数定数 $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n$ に対し，
$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \{a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\}$ とおく。このとき，次の定数を
$f(t)$ を用いた ($-\pi \leqq t \leqq \pi$ の範囲の) 定積分で表せ。

(1) $a_0 =$　　(2) $a_k =$　　(3) $b_k =$

問 2　周期 2π の周期関数 $f(t)$ が次の場合に，$f(t)$ のフーリエ級数を求めよ。

(1) $f(t) = \begin{cases} 0 & : \ t = \pi \\ \frac{\pi}{2} & : \ 0 \leqq t < \pi \\ 0 & : \ -\pi \leqq t < 0 \end{cases}$

(2) $f(t) = \begin{cases} 0 & : \ t = \pi \\ 1 & : \ 0 < t < \pi \\ 0 & : \ t = 0 \\ -1 & : \ -\pi < t < 0 \\ 0 & : \ t = -\pi \end{cases}$

(3) $f(t) = \begin{cases} 0 & : \ t = \pi \\ t & : \ -\pi < t < \pi \\ 0 & : \ t = -\pi \end{cases}$

(4) $f(t) = |t| - \pi \quad (-\pi \leqq t \leqq \pi)$

問 3　問 2(1) の結果を利用して，次式を示せ。

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

問 4　問 2(4) の結果を利用して，次式を示せ。

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} + \cdots$$

問 5　周期 $L(>0)$ の周期関数 $f(t)$ のフーリエ級数の複素数表示は

$$f(t) \quad \sim \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{ik\omega t} \quad , \qquad C_k = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t) e^{-ik\omega t} dt$$

である。(ただし $\omega = \frac{2\pi}{L}$)　次の各場合に $f(t)$ のフーリエ級数を実数表示せよ。

(1) $f(t)$ が偶関数のとき

(2) $f(t)$ が奇関数のとき