＜フーリエ級数の複素数表示 2＞

周期 L の周期関数 $f(t)$ のフーリエ級数は

$$(*)\quad \boxed{\begin{array}{l} f(t) \quad \sim \quad a_0+\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\, a_k\cos(k\omega t)+b_k\sin(k\omega t)\,\right\} \quad , \quad \omega=\frac{2\pi}{L} \\[2ex] a_0=\displaystyle\frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2}f(t)dt\ ,\ a_k=\frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2}f(t)\cos(k\omega t)dt\ ,\ b_k=\frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2}f(t)\sin(k\omega t)dt \end{array}}$$

である。このフーリエ級数の等 n 部分和は前ページより

$$\boxed{S_n(t)=a_0+\sum_{k=1}^{n}\left\{a_k\cos(k\omega t)+b_k\sin(k\omega t)\,\right\}=\sum_{k=-n}^{n}C_ke^{ik\omega t}} \quad (1)$$

と表される。ここで

$$\boxed{C_k=\frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2}f(t)e^{-ik\omega t}dt} \quad (2)$$

である。

問 1　(2) 式の C_k において k の代わりに $-k$ (または 0) を代入した式を積分の形で表示し , 前ページ問の結果を使って a_0 , a_k , b_k で表せ。

$C_{-k}=$

$C_0=$

(1) 式で $n\to\infty$ の極限を考えるとフーリエ級数の式 $(*)$ は次のように簡単になる。

$$(**)\quad \boxed{f(t) \quad \sim \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty}C_ke^{ik\omega t}\ ,\ \omega=\frac{2\pi}{L}\ ,\ C_k=\frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2}f(t)e^{-ik\omega t}dt}$$

＜周期 L の周期関数 $f(t)$ のフーリエ級数 (複素数表示)＞

$(**)$ 式を**フーリエ級数の複素数表示**という。

問 2　周期関数 $f(t)$ の周期が以下の場合に , フーリエ級数を複素数表示せよ。(ただし $m>0$)

(1)　周期 2π

(2)　周期 $2\pi m$