< フーリエ級数の複素数表示 1 >

周期 L の周期関数 $f(t)$ のフーリエ級数は $\omega = \dfrac{2\pi}{L}$ とすると

$$\boxed{f(t) \quad \sim \quad a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\}} \quad (1)$$

と表される。ここでフーリエ係数は

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)dt \quad , \quad a_k = \frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)\cos(k\omega t)dt \quad , \quad b_k = \frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)\sin(k\omega t)dt} \quad (2)$$

である。この第 n 部分和 $S_n(t)$ は前ページの結果より

$$\boxed{S_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \{a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\} = \sum_{k=-n}^{n} C_k e^{ik\omega t}} \quad (3)$$

と表される。ただし C_k は

$$\boxed{C_k = \frac{a_k}{2} - \frac{b_k}{2}i \quad , \quad C_{-k} = \frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2}i \quad , \quad C_0 = a_0} \quad (4)$$

である。$k \geqq 1$ のときの C_k は (2) 式より

$$C_k = \frac{1}{2}\{a_k - b_k i\} = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)\cos(k\omega t)dt\right) - \left(\frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)\sin(k\omega t)dt\right) i\right\}$$

$$= \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)\{\cos(k\omega t) - i\sin(k\omega t)\}dt = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)e^{-ik\omega t}dt$$

問　$k \geqq 1$ に対し、次の係数を上のような $f(t)$ に関する積分の形にせよ。

(1)　$C_{-k} = \dfrac{1}{2}(a_k + b_k i) =$

(2)　$C_0 = a_0 =$