< 三角多項式の複素数表示 >

例　定数 a_0 , a_1 , a_2 ,$\cdots$, a_n , b_1 , b_2 ,$\cdots$, b_n に対して三角多項式

$$\boxed{S(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \{a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\}} \quad (1)$$

を考える。前ページより

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) \quad , \quad \sin\theta = \frac{i}{2}\left(e^{-i\theta} - e^{i\theta}\right)$$

である。これを (1) 式に代入すると

$$\begin{aligned} S(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left\{ a_k \times \frac{1}{2}\left(e^{ikt} + e^{-ikt}\right) + b_k \times \frac{i}{2}\left(e^{-ikt} - e^{ikt}\right) \right\} \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_k}{2} - \frac{b_k}{2} i \right) e^{ikt} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2} i \right) e^{-ikt} \end{aligned}$$

となる。ここで $k \geqq 1$ に対し

$$\boxed{C_k = \frac{a_k}{2} - \frac{b_k}{2} i \quad , \quad C_{-k} = \frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2} i \quad , \quad C_0 = a_0} \quad (2)$$

とおくと $S(t)$ は

$$S(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{n} C_k e^{ikt} + \sum_{k=1}^{n} C_{-k} e^{-ikt}$$

より

$$\boxed{S(t) = \sum_{k=-n}^{n} C_k e^{ikt}} \quad (3)$$

と表される。

問　定数 ω , a_0 , a_1 ,$\cdots$, a_n , b_1 ,$\cdots$, b_n に対して、三角多項式

$$S(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \{a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\}$$

を例の (3) 式のような形にせよ。また C_k を (2) 式のような式で表せ。