＜オイラーの公式＞

自然対数の底 $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $(=2.718\cdots)$ に対し，指数関数 e^x をマクローリン展開によって展開すると

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \qquad \big(=\exp(x)\big)$$

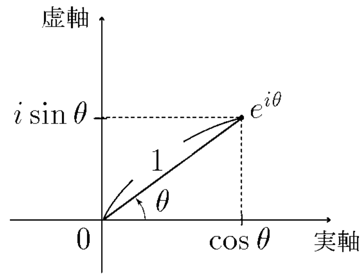
となる。この右辺を $\exp(x)$ と書く場合もある。Z が複素数の場合の指数関数 e^Z を $\exp(Z)$ で定義する。虚数単位 i と実数 θ に対し

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \exp(i\theta) = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \frac{(i\theta)^7}{7!} + \frac{(i\theta)^8}{8!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \frac{\theta^8}{8!} - \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots\right) \\ &= \cos\theta + i\sin\theta \end{aligned}$$

となる。この式

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta} \qquad \text{(オイラーの公式)}$$

を**オイラーの公式**という。複素平面で表すと右図のようになる。



問 1　次の複素数を $x+iy$ (x と y は実数) の形にし，できるだけ簡単にせよ。

(1) $e^{2\pi i}$　(2) $e^{-\pi i}$　(3) $e^{\frac{\pi}{2}i}$

(4) $e^{\frac{\pi}{3}i}$　(5) $e^{-\frac{\pi}{6}i}$　(6) $e^{\frac{3}{4}\pi i}$

問 2　実数 θ に対し $\left|e^{i\theta}\right|$ の値を求めよ。$\left(\text{ただし } |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2} \text{ である}\right)$

$\left|e^{i\theta}\right| =$

問 3　実数 θ に対し三角関数の性質 $\cos(-\theta)=\cos\theta$，$\sin(-\theta)=-\sin\theta$ を用いて次式を $\cos\theta$ と $\sin\theta$ および i で表せ。

$e^{-i\theta} =$

問 4　オイラーの公式と問 3 の結果をつかって次式を $e^{i\theta}$ と $e^{-i\theta}$ で表せ。(分母は実数化せよ)

$\cos\theta =$　　　　　　　　　　,　$\sin\theta =$