< 一般周期のフーリエ級数 1 >

正の定数 L に対し , 周期 L の周期関数 $f(t)$ を考える。$y = f(t)$ のグラフは $-\frac{L}{2} \leqq t \leqq \frac{L}{2}$ の範囲の曲線が周期的に繰り返されていく。周期 2π の関数の場合と同様に $f(t)$ のフーリエ級数が考えられる。

この場合 $f(t)$ のフーリエ級数は

$$\boxed{f(t) \quad \sim \quad a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{L}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{L}t\right) \right\}}$$

(周期 L の フーリエ級数)

となる。ここでフーリエ係数 a_0 , a_k , b_k は

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)dt \quad , \quad a_k = \frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)\cos\left(\frac{2k\pi}{L}t\right)dt$$

$$b_k = \frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(t)\sin\left(\frac{2k\pi}{L}t\right)dt \qquad (k \geqq 1)$$

(周期 L の フーリエ係数)

となる。

問　周期関数 $f(t)$ の周期が次の各場合に , 上記のようにフーリエ級数とフーリエ係数を求めよ。(ただし $\ell > 0$)

(1) 周期 $2\,\ell$

(2) 周期 $2\pi\,\ell$