< フーリエ級数の収束 >

$f(t)$ を周期 2π の周期関数とする。$f(t)$ のフーリエ級数の第 n 部分和は

$$S_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}\{a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt)\}$$

である。ただし係数 a_0, a_k, b_k は

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt$$

である。$f(t)$ が 18 ページ図 1 のような関数のとき, $S_n(t)$ は図 2(P18) のような曲線の形をとりながら $f(t)$ に近づいていく。

[定理]　周期 2π の周期関数 $f(t)$ に対し次式が成り立つ。

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n(t) = \frac{f_-(t) + f_+(t)}{2}} \quad (-\pi \leqq t \leqq \pi)$$

(注) (正確に言うと関数 $f(t)$ には ” 区分的になめらか ” という条件が必要だが、その定義は複雑なので省略する。普通の関数は全てこの条件を満足すると思ってよい。)

この定理の右辺 $\frac{1}{2}\left(f_-(t) + f_+(t)\right)$ は左側極限値と右側極限値の平均である。

前ページ問 3 の結果より,

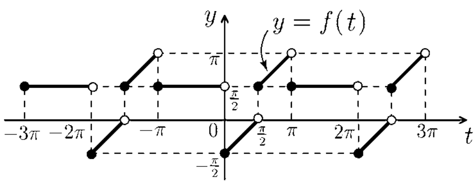
$f(t)$ が $t = t_0$ で連続のとき $S_\infty(t_0) = \lim_{n\to\infty} S_n(t_0) = f(t_0)$ である。

$f(t)$ が $t = t_0$ で不連続のとき極限値 $S_\infty(t_0)$ は左側極限値 $f_-(t_0)$ と右側極限値 $f_+(t_0)$ の中点である。この定理を

$$\boxed{S_\infty(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\{a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt)\} = \frac{f_-(t) + f_+(t)}{2}} \quad (\text{フーリエ級数の収束})$$

と表すこともある。

例　$f(t)$ が右図のような周期関数のとき $f(t)$ のフーリエ級数を $S_\infty(t)$ とすると



$$S_\infty(-\tfrac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}\left\{f_-(-\tfrac{\pi}{2}) + f_+(-\tfrac{\pi}{2})\right\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right\} = \frac{\pi}{2}$$

$$S_\infty(\pi) = \frac{1}{2}\left\{f_-(\pi) + f_+(\pi)\right\} = \frac{1}{2}\left\{\pi + \frac{\pi}{2}\right\} = \frac{3\pi}{4}$$

問　例の場合に以下の値を求めよ。

(1)$S_\infty(\frac{3\pi}{2})$　　(2)$S_\infty(0)$

(3)$S_\infty(\frac{\pi}{2})$　　(4)$S_\infty(-\pi)$