< フーリエ級数 6 >

関数 $f(t)$ に対するフーリエ級数の第 n 部分和を

$$S_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \big\{ a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt) \big\}$$

とする。フーリエ級数 $S_\infty(t) = \lim_{n\to\infty} S_n(t)$ は元の関数 $f(t)$ と一致するかどうかは場合によって異なる。

例 1　$f(t)$ が 17 ページの例のような連続な周期関数のとき，$f(t)$ と第 7 部分和 $S_7(t)$ のグラフはほとんど一致しているように見える。実際に，この場合は全ての実数 t でフーリエ級数と元の関数 $f(t)$ が一致している。つまり

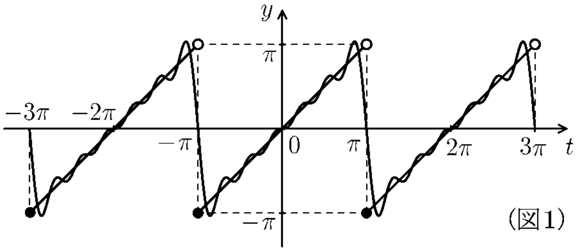
$$f(t) = \lim_{n\to\infty} S_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \big\{ a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt) \big\} = S_\infty(t)$$

が全ての実数 t で成り立つ。

例 2　$f(t)$ が 16 ページの例の関数の場合，$t = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \cdots$ で $f(t)$ は不連続になる。図 1 は $n = 6$ までの部分和 $S_6(t)$ と $f(t)$ のグラフを重ねて表したものである。このグラフでは $t = \pi$ のとき

$f(\pi) = -\pi$, $S_6(\pi) = 0$

である。実際フーリエ級数 $S_\infty(t)$ は



(図1)

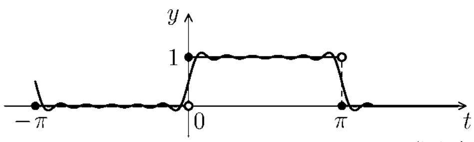
$$S_\infty(t) = 2\left\{ \frac{1}{1}\sin(t) - \frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{1}{3}\sin(3t) - \frac{1}{4}\sin(4t) + \frac{1}{5}\sin(5t) - \frac{1}{6}\sin(6t) + \cdots \right\}$$

であるが，$\sin(n\pi) = 0 \ \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ であるから $S_\infty(\pi) = 0$ より $f(\pi) \neq S_\infty(\pi)$ である。よって

$$f(n\pi) = -\pi \quad , \quad S_\infty(n\pi) = 0 \qquad (n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \cdots)$$

となる。しかし，それ以外の t では $f(t) = S_\infty(t)$ となる。

問　$f(t)$ が 15 ページの例の関数のとき，フーリエ級数の第 11 部分和 $S_{11}(t)$ と $f(t)$ のグラフは図 2 のようになる。このとき，フーリエ級数 $S_\infty(t)$ と元の関数 $f(t)$ の $t = 0, \pi$ のときの値を求めよ。



(図2)

$f(0) =$ 　　　　　, $S_\infty(0) =$

$f(\pi) =$ 　　　　　, $S_\infty(\pi) =$