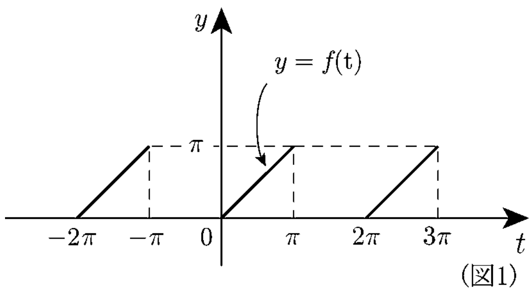
＜フーリエ級数 5＞

例　$f(t)$ が図 1 のような周期関数のとき

$-\pi \leqq t \leqq \pi$ の範囲では

$$f(t)=\begin{cases} t: & 0 \leqq t \leqq \pi \\ 0: & -\pi \leqq t \leqq 0 \end{cases}$$



(図1)

となるのでフーリエ係数は

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} tdt=\frac{\pi}{4}$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos(kt)\,dt=\frac{\cos(k\pi)-1}{\pi k^2}$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin(kt)dt=-\frac{\cos(k\pi)}{k}$$

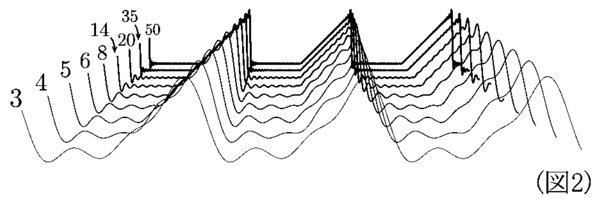
となるのでフーリエ級数の第 n 部分和 $S_n(t)$ は

$$S_n(t)=a_0+\sum_{k=1}^{n}\{a_k\cos(kt)+b_k\sin(kt)\}$$

$$=\frac{\pi}{4}+\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{\cos(k\pi)-1}{\pi k^2}\right)\cos(kt)-\left(\frac{\cos(k\pi)}{k}\right)\sin(kt)\right\}$$

となる。

図 2 では $n=3,4,5,6,8,14,20,35,50$ のときの $S_n(t)$ のグラフを $-3\pi \leqq t \leqq 3\pi+0.5$ までの範囲で手前から順に描いた図である。見やすくするために手前のグラフを拡大してある。

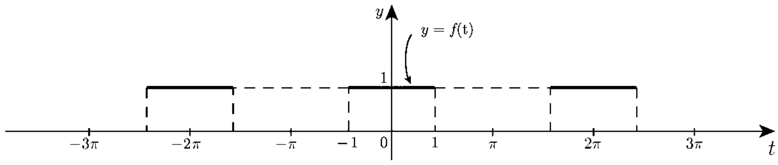


(図2)

問　$f(t)$ が図 3 のような周期関数のとき

$-\pi \leqq t \leqq \pi$ の範囲では

$$f(t)=\begin{cases} 0: & 1<t \leqq \pi \\ 1: & -1 \leqq t \leqq 1 \\ 0: & -\pi \leqq t < -1 \end{cases}$$



(図3)

となる。$f(t)$ のフーリエ級数の第 n 部分和 $S_n(t)$ を求め，例のように $\sum$ で表せ。