

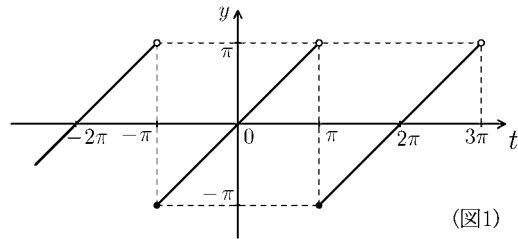
### < フーリエ級数 3 >

例  $f(t)$  が図 1 のような周期関数のとき

$-\pi < t < \pi$  の範囲では

$$f(t) = t$$

であるから、 $f(t)$  は奇関数と考える。



(図1)

14 ページの結果より奇関数の場合は

フーリエ係数は

$$a_0 = 0 \quad , \quad a_k = 0 \quad (k \geq 1)$$

であり、奇関数  $\times$  奇関数 = 偶関数だから

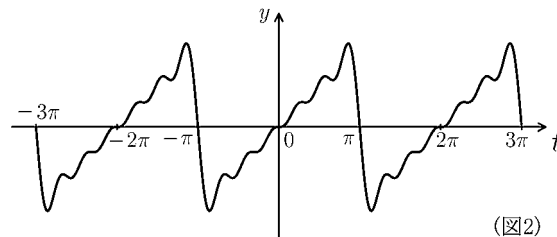
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(kt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin(kt) dt$$

となり、11 ページの結果から

$$\int_0^{\pi} t \sin(kt) dt = \begin{cases} \frac{\pi}{k} & : k \text{ が奇数} \\ -\frac{\pi}{k} & : k \text{ が偶数} \end{cases}$$

であるから

$$b_k = \begin{cases} \frac{2}{k} & : k \text{ が奇数} \\ -\frac{2}{k} & : k \text{ が偶数} \end{cases}$$



(図2)

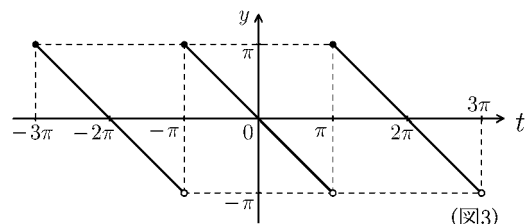
となり、フーリエ級数は

$$\begin{aligned} f(t) &\sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\} \\ &= \frac{2}{1} \sin t - \frac{2}{2} \sin(2t) + \frac{2}{3} \sin(3t) - \frac{2}{4} \sin(4t) + \frac{2}{5} \sin(5t) - \frac{2}{6} \sin(6t) + \dots \\ &= 2 \left\{ \sin t - \frac{1}{2} \sin(2t) + \frac{1}{3} \sin(3t) - \frac{1}{4} \sin(4t) + \frac{1}{5} \sin(5t) - \frac{1}{6} \sin(6t) + \dots \right\} \end{aligned}$$

となる。図 2 のグラフはこのフーリエ級数の  $k = 6$  までの部分和のグラフである。

問  $f(t)$  が図 3 の周期関数であるとき、

$f(t)$  のフーリエ級数を求めよ。



(図3)