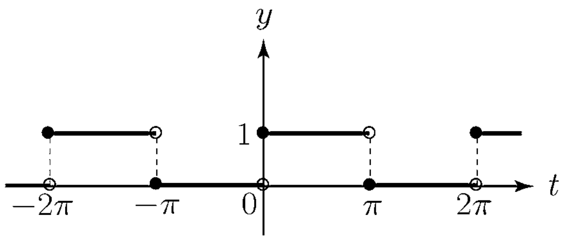
< フーリエ級数 2 >

例 $f(t)$ が図 1 のような周期関数の場合のフーリエ級数を求めたい。



(図1)

$-\pi \leqq f(t) \leqq \pi$ の範囲では

$$f(t) = \begin{cases} 1 & : 0 \leqq t < \pi \\ 0 & : -\pi \leqq t < 0 \end{cases}$$

である。フーリエ係数は

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} 1dt = \frac{1}{2\pi}\left[t\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(kt)dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{k}\sin(kt)\right]_{t=0}^{t=\pi} = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(kt)dt = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{k}\cos(kt)\right]_{t=0}^{t=\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{k}\cos(k\pi) + \frac{1}{k}\cos(0)\right) = \begin{cases} 0 & : k \text{ が偶数} \\ \dfrac{2}{k\pi} & : k \text{ が奇数} \end{cases}$$

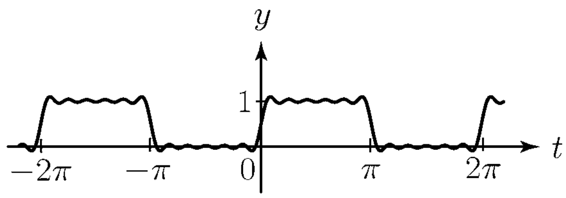
であるからフーリエ級数は

$$f(t) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\{a_k\cos(kt) + b_k\sin(kt)\}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin t + \frac{2}{3\pi}\sin(3t) + \frac{2}{5\pi}\sin(5t) + \frac{2}{7\pi}\sin(7t) + \frac{2}{9\pi}\sin(9t) + \frac{2}{11\pi}\sin(11t) + \cdots$$

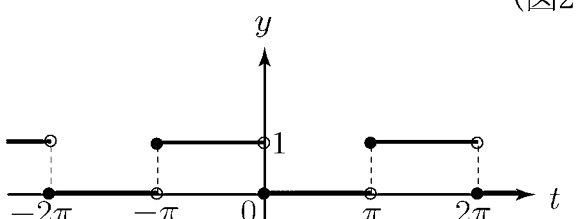
$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left\{\sin t + \frac{1}{3}\sin(3t) + \frac{1}{5}\sin(5t) + \frac{1}{7}\sin(7t) + \frac{1}{9}\sin(9t) + \frac{1}{11}\sin(11t) + \cdots\right\}$$

となる。右図 (図 2) はこのフーリエ級数の $k = 11$ までの部分和のグラフである。



(図2)

問 $f(t)$ が図 3 の周期関数であるとき、$f(t)$ のフーリエ級数を求めよ。



(図3)