＜ フーリエ級数 1 ＞

三角多項式

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \{a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\}$$

は周期 2π の周期関数である。前ページの結果より各係数は

$$(*)\quad \boxed{a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt \;\; , \;\; a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt \;\; , \;\; b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt} \quad (k \geqq 1)$$

で定まる。一方 7 ページの図 5 や図 6 を見ると，一般の周期 2π の
周期関数も三角多項式で近似できることが予想される。そこで一般の
周期 2π の周期関数 $f(t)$ に対し，$(*)$ で定められた係数 a_0, a_k, b_k を
とるとき，無限級数

$$\begin{aligned} & a_0 + a_1\cos t + b_1 \sin t + \cdots + a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) + \cdots \\ &\quad = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\} \end{aligned}$$

は $f(t)$ を近似としていると考え，

$$\boxed{f(t) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\}}$$

と書き，発見者の名前をつけて $f(t)$ の**フーリエ級数** (Fourier series) という。
また a_0, a_k, b_k を**フーリエ係数**という。

例　$f(t)$ が偶関数のときは $f(t)\cos(kt)$ は偶関数であり, $f(t)\sin(kt)$ は奇関数だから

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)dt$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\cos(kt)dt$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)dt = 0$$

よって $f(t)$ のフーリエ級数は

$$f(t) \sim a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt)$$

問　$f(t)$ が奇関数の場合にフーリエ係数とフーリエ級数を例のように表せ。