

< 三角多項式の係数 2 >

例 定数 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ に対して

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n \{a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\}$$

とおく。 $1 \leq m \leq n$ なる自然数 m に対して、8 ページの結果より

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(mt) dt &= \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) \right\} \cos(mt) dt \\ &= a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mt) dt + \sum_{k=1}^n \left\{ a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt) \cos(mt) dt + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt) \cos(mt) dt \right\} \\ &= 0 + \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq m}} \left\{ a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt) \cos(mt) dt + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt) \cos(mt) dt \right\} \\ &\quad + a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(mt) dt + b_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt) \cos(mt) dt = \pi a_m \end{aligned}$$

問 例の $f(t)$ に対し、次の定積分の値を求めよ。

(1) $\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(mt) dt$

(2) $\int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$